Catégories 2

Le λ-calcul simplement typé comme une catégorie

Syntaxe

$$
\begin{array}{rcl}
e & ::= & x \mid e\ e' \mid \lambda x.e \\
\tau & ::= & \alpha \mid \tau^{\tau'} \\
\Gamma & ::= & \epsilon \mid \Gamma, x : \tau
\end{array}
$$

Le strip-tease le plus éculé du monde

$$\frac{}{\Gamma, \quad \tau, \Gamma' \vdash \quad \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash \quad \tau^{\tau'} \qquad \Gamma \vdash \quad \tau'}{\Gamma \vdash \quad \tau}$$

$$\frac{\Gamma, \quad \tau' \vdash \quad \tau}{\Gamma \vdash \quad \tau^{\tau'}}$$

- Sous le tapis : $\vdash \Gamma$, α-équivalence, ...
- Notations
  - On note $\tau^{\tau'}$ ou $\tau' \to \tau$, alternativement.
  - On note $\Gamma \vdash \tau$ l'ensemble des $\Gamma \vdash e : \tau$.
- Détail technique :

$$\begin{array}{lcl} \text{morphismes} & = & \Gamma \vdash \gamma : \Delta \textit{ prouvables} \\ & = & \text{substitutions valides avec leur domaine et leur codomaine.} \end{array}$$

Le strip-tease le plus éculé du monde

$$\frac{\vdash \Gamma, x : \tau, \Gamma'}{\Gamma, x : \tau, \Gamma' \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash e : \tau^{\tau'} \qquad \Gamma \vdash e' : \tau'}{\Gamma \vdash e\, e' : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau' \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau^{\tau'}}$$

- Sous le tapis : $\vdash \Gamma$, α-équivalence, ...
- Notations
  - On note $\tau^{\tau'}$ ou $\tau' \to \tau$, alternativement.
  - On note $\Gamma \vdash \tau$ l'ensemble des $\Gamma \vdash e : \tau$.
- Détail technique :

  morphismes = $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$ *prouvables*
  = substitutions valides avec leur domaine et leur codomaine.

Règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash e' : \tau' \qquad \Gamma, x : \tau', \Gamma' \vdash e : \tau}{\Gamma, \Gamma' \vdash [x \mapsto e'](e) : \tau}$$

Egalité (Relation d'équivalence)

$$\textsc{Refl}\ \frac{\Gamma \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash e = e : \tau} \qquad \textsc{Sym}\ \frac{\Gamma \vdash e = e' : \tau}{\Gamma \vdash e' = e : \tau}$$

$$\textsc{Trans}\ \frac{\Gamma \vdash e = e' : \tau \qquad \Gamma \vdash e' = e'' : \tau}{\Gamma \vdash e = e'' : \tau}$$

Egalité (Congruence)

$$\textsc{App}\quad \frac{\Gamma \vdash e_1 = e_2 : \tau^{\tau'} \qquad \Gamma \vdash e_1' = e_2' : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_1' = e_2\ e_2' : \tau}$$

$$\textsc{Fun}\quad \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash e = e' : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.e = \lambda x.e' : \tau^{\tau'}}$$

Egalité (Suite et fin)

$$\textsc{Beta}\quad \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash e : \tau \qquad \Gamma \vdash e' : \tau'}{\Gamma \vdash (\lambda x.e)\ e' = [x \mapsto e'](e) : \tau}$$

$$\textsc{Eta}\quad \frac{\Gamma \vdash e : \tau^{\tau'} \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma \vdash e = \lambda x.(e\ x) : \tau^{\tau'}}$$

Pas sous le tapis : tout se passe dans un contexte.

Règle admissible

$$\frac{\Gamma \vdash e'_1 = e'_2 : \tau' \qquad \Gamma, x : \tau', \Gamma' \vdash e_1 = e_2 : \tau}{\Gamma, \Gamma' \vdash [x \mapsto e'_1](e_1) = [x \mapsto e'_2](e_2) : \tau}$$

Syntaxe

$$
\begin{array}{rcl}
e & ::= & x \mid e\,e' \mid \lambda x.e \\
\tau & ::= & \alpha \mid \tau^{\tau'} \\
\Gamma & ::= & \epsilon \mid \Gamma, x : \tau \\
\gamma & ::= & \epsilon \mid \gamma, e
\end{array}
$$

Typage

$$\frac{}{\Gamma \vdash \epsilon : \epsilon} \qquad \frac{\Gamma \vdash \gamma : \Delta \qquad \Gamma \vdash e : \tau \qquad x \notin dom(\Delta)}{\Gamma \vdash (\gamma, e) : \Delta, x : \tau}$$

(Formellement,

- contextes = listes de types
- variables libres = indices.

Comme on y voit plus rien, on continue informellement comme avant.)

Catégorie syntaxique

On va définir une catégorie $\mathrm{Cl}_0(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ dont :

- les objets sont les contextes de typage Γ et
- les morphismes $\Gamma \to \Delta$ sont les substitutions $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$.

On note aussi $\Gamma \vdash \Delta$ pour l'ensemble des morphismes $\Gamma \to \Delta$.

Pourquoi « substitutions » ?

- Posons
$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & (x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m) \\ \Delta & = & (y_1 : \tau'_1, \ldots, y_n : \tau'_n). \end{array}$$
- Voir le tuple
$$\Gamma \vdash (e_1, \ldots, e_n) : (y_1 : \tau'_1, \ldots, y_n : \tau'_n)$$
comme la substitution
$$\gamma^* = [y_1 \mapsto e_1, \ldots, y_n \mapsto e_n].$$

Pourquoi « substitutions » ?

- Posons
$$\begin{aligned} \Gamma &= (x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m) \\ \Delta &= (y_1 : \tau'_1, \ldots, y_n : \tau'_n). \end{aligned}$$
- Voir le tuple
$$\Gamma \vdash (e_1, \ldots, e_n) : (y_1 : \tau'_1, \ldots, y_n : \tau'_n)$$
comme la substitution
$$\gamma^* = [y_1 \mapsto e_1, \ldots, y_n \mapsto e_n].$$
- Pour $\Delta \vdash e : \tau$, une version édulcorée du lemme de substitution donne
$$\Gamma \vdash \gamma^*(e) : \tau.$$
- Donc on peut voir γ^* comme une fonction :
$$(\Delta \vdash \tau) \rightarrow_{\mathbf{Set}} (\Gamma \vdash \tau)$$
(pour n'importe quel τ, ou alors indexée par τ).

Identités

Pour $\Gamma = (x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m)$,

$$id_\Gamma = (x_1, \ldots, x_m).$$

La substitution qui va avec est

$$id_\Gamma = [x_1 \mapsto x_1, \ldots, x_m \mapsto x_m].$$

Composition

- Soient
$$\begin{aligned} \Gamma &= (x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m) \\ \Delta &= (y_1 : \tau'_1, \ldots, y_n : \tau'_n) \\ \Theta &= (z_1 : \tau''_1, \ldots, z_p : \tau''_p) \text{ et} \end{aligned}$$
$$\Gamma \xrightarrow{\gamma = (e_1, \ldots, e_n)} \Delta \xrightarrow{\gamma' = (e'_1, \ldots, e'_p)} \Theta.$$

- Chaque $\Delta \vdash e'_k : \tau''_k$ est envoyé par γ^* sur
$$\Gamma \vdash \gamma^*(e'_k) : \tau''_k.$$

- On définit $\gamma^*(e'_1, \ldots, e'_p) = (\gamma^*(e'_1), \ldots, \gamma^*(e'_p))$, et on a
$$\begin{array}{rccc} \gamma^* : & (\Delta \vdash \Theta) & \to & (\Gamma \vdash \Theta) \\ & \gamma' & \mapsto & \gamma^*(\gamma') \end{array}$$

- On appelle ça la *précomposition* par γ.
- Du coup on définit naturellement la composition par
$$\gamma' \circ \gamma = \gamma^*(\gamma').$$

Associativité

Pour $\Gamma \xrightarrow{\gamma} \Delta \xrightarrow{\gamma'} \Theta \xrightarrow{\gamma''} \xi,$

par définition :

$$\begin{aligned} (\gamma'' \circ \gamma') \circ \gamma &= \gamma^*(\gamma'^*(\gamma'')) \\ \gamma'' \circ (\gamma' \circ \gamma) &= (\gamma^*(\gamma'))^*(\gamma'') \end{aligned}$$

Associativité

Pour $\Gamma \xrightarrow{\gamma} \Delta \xrightarrow{\gamma'} \Theta \xrightarrow{\gamma''} \xi,$

par définition :

$$\begin{array}{rcl} (\gamma'' \circ \gamma') \circ \gamma & = & \gamma^* \; \gamma'^* \; \gamma'' \\ \gamma'' \circ (\gamma' \circ \gamma) & = & (\gamma^* \; \gamma' \;)^* \; \gamma'' \end{array}$$

en zappant les parethèses zappables. Il suffit donc de montrer pour tout $\Theta \vdash e'' : \tau'''$:

$$\gamma^* \gamma'^* e'' = (\gamma^* \gamma')^* e'',$$

soit $[y \mapsto e]_j [z \mapsto e']_k (e'') = [z \mapsto [y \mapsto e]_j (e')]_k (e'')$.

- Les variables libres de e'' sont toutes des z_k.
- Résultat classique et facile.

Catégories syntaxique et sémantique

- Pour l'instant, on a défini $\mathsf{Cl}_0(\Lambda_{\mathrm{ST}})$.
  - Objets : contextes Γ.
  - Morphismes : substitutions $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$ *syntaxiques*.
- On définit maintenant $\mathsf{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ par
  - Objets : contextes Γ.
  - Morphismes $\Gamma \to \Delta$: substitutions $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$ modulo la relation $\Gamma \vdash \gamma = \gamma' : \Delta$ définie par

$$\frac{}{\Gamma \vdash \epsilon = \epsilon : \epsilon} \qquad \frac{\Gamma \vdash \gamma = \gamma' : \Delta \qquad \Gamma \vdash e = e' : \tau}{\Gamma \vdash (\gamma, e) = (\gamma', e') : (\Delta, x : \tau)}.$$

- En gros on quotiente par BETA, ETA.
- C'est une congruence (ça l'était sur les termes et ça le reste évidemment sur les tuples).

Catégories syntaxique et sémantique (suite)

- La composition et les identités respectent cette équivalence. Dans $\mathsf{Cl}_0(\Lambda_{\mathrm{ST}})$, si on a

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, bend left, "\gamma^1 = (e^1_1, \ldots, e^1_n)"] \arrow[r, bend right, "\gamma^2 = (e^2_1, \ldots, e^2_n)"'] & \Delta \arrow[r, bend left, "\gamma^3 = (e^3_1, \ldots, e^3_p)"] \arrow[r, bend right, "\gamma^4 = (e^4_1, \ldots, e^4_p)"'] & \Theta. \end{tikzcd}$$

  avec $\Gamma \vdash \gamma^1 = \gamma^2 : \Delta$ et $\Delta \vdash \gamma^3 = \gamma^4 : \Theta$, alors $\Gamma \vdash \gamma^3 \circ \gamma^1 = \gamma^4 \circ \gamma^2 : \Theta$.

- Preuve :

$$\begin{aligned} \gamma^{1^*}(e^3{}_k) &=_{\Gamma\vdash\tau''_k} (\lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.e^3_k)\ \gamma^1 \\ &=_{\Gamma\vdash\tau''_k} (\lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.e^4_k)\ \gamma^1 \\ &=_{\Gamma\vdash\tau''_k} (\lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.e^4_k)\ \gamma^2 \\ &=_{\Gamma\vdash\tau''_k} \gamma^{2^*}(e^4_k). \end{aligned}$$

Intérêt de Cl(Λ_{ST})

- Bon, ok, ça fait une catégorie. Après ?
- Cette catégorie est en fait la catégorie cartésienne fermée initiale.
- Du coup, en raisonnant dessus, on raisonne en fait sur toutes les catégories cartésiennes fermées (cf. théorie des modèles).
- Ça veut dire quoi « cartésienne fermée » ?

Définition catégorique du produit cartésien

$$A \xleftarrow{\pi} A \times B \xrightarrow{\pi'} B$$

$(A \times B, \pi, \pi')$ est un produit cartésien de A et B

Définition catégorique du produit cartésien

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & B
\end{tikzcd}$$

$(A \times B, \pi, \pi')$ est un produit cartésien de A et B

Définition catégorique du produit cartésien

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & B
\end{tikzcd}$$

$(A \times B, \pi, \pi')$ est un produit cartésien de A et B

Définition catégorique du produit cartésien

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & B
\end{tikzcd}
$$

Définition

Une catégorie est cartésienne quand elle a un produit cartésien pour tous objets A et B.

$\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ est cartésienne

- Soient $\begin{array}{rcl} \Gamma & = & (x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m) \\ \Delta & = & (y_1 : \tau'_1, \ldots, y_n : \tau'_n) \end{array}$ et deux objets de $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$.
- On définit $\Gamma \times \Delta = \Gamma, \Delta$ (leur concaténation).
- Rappel : les noms de variables dans les contextes servent juste à la lisibilité.
- Projections :
  - $\pi = (x_1, \ldots, x_m) : \Gamma \times \Delta \to \Gamma$ et
  - $\pi' = (y_1, \ldots, y_n) : \Gamma \times \Delta \to \Delta$.

$\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ est cartésienne (suite)

Pour
$$\begin{tikzcd}
 & \Theta \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
\Gamma & \Gamma \times \Delta \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & \Delta
\end{tikzcd}$$

Cl(Λ_{ST}) est cartésienne (suite)

Pour

$$\begin{tikzcd} & \Theta \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, dashed, "{\langle \gamma, \gamma' \rangle}"] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\ \Gamma & \Gamma \times \Delta \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & \Delta \end{tikzcd}$$

- On définit $\langle \gamma, \gamma' \rangle = (\gamma, \gamma')$ (la concaténation).
- On a évidemment $\begin{array}{rcl} \pi \circ \langle \gamma, \gamma' \rangle & = & \gamma \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} \pi' \circ \langle \gamma, \gamma' \rangle & = & \gamma'. \end{array}$

Cl(Λ_{ST}) est cartésienne (suite)

Pour
$$\begin{tikzcd}
 & \Theta \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, dotted, "\gamma''"'] \arrow[d, dashed, "\langle\gamma,\gamma'\rangle"] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
\Gamma & \Gamma \times \Delta \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & \Delta
\end{tikzcd}$$

- On définit $\langle\gamma,\gamma'\rangle = (\gamma,\gamma')$ (la concaténation).
- On a évidemment $\begin{array}{rcl} \pi \circ \langle\gamma,\gamma'\rangle & = & \gamma \text{ et} \\ \pi' \circ \langle\gamma,\gamma'\rangle & = & \gamma'. \end{array}$
- Et pour l'unicité,
  - si γ'' tel que [la même chose],
  - par typage, γ'' est de la forme $(e''_1, \ldots, e''_m, e'''_1, \ldots, e'''_n)$,
  - donc $(e''_1, \ldots, e''_m) =_{\Theta \vdash \Gamma} \pi \circ \gamma'' =_{\Theta \vdash \Gamma} \gamma$.
  - Symétriquement, $(e'''_1, \ldots, e'''_n) =_{\Theta \vdash \Gamma} \gamma'$.
  - Donc $\gamma'' =_{\Theta \vdash \Gamma} \langle\gamma,\gamma'\rangle$.

Unicité à iso unique près

On se place dans une catégorie arbitraire.

Définition

Un isomorphisme est un morphisme $f : A \to B$ doté d'un inverse $g : B \to A$ à droite et à gauche :

$$g \circ f = id_A \qquad \text{et} \qquad f \circ g = id_B.$$

Proposition

Un produit cartésien est unique à unique isomorphisme commutant près.

Bougez pas, je vous explique ce que ça veut dire.

Remarque préliminaire

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "f"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & B \end{tikzcd}$$

Remarque préliminaire

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, dotted, "\pi \circ f"'] \arrow[dr, dotted, "\pi' \circ f"] \arrow[dd, "f"] \arrow[dd, dotted, bend right, "f' = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle"'] & \\
A & & B \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi"] \arrow[ur, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $f' = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle$ est l'unique morphisme t.q.
$$
\begin{aligned}
\pi \circ f' &= \pi \circ f \\
\pi' \circ f' &= \pi' \circ f.
\end{aligned}
$$
- f convient donc $f' = f$.

Remarque préliminaire

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, dotted, "\pi \circ f"'] \arrow[dr, dotted, "\pi' \circ f"] \arrow[d, "f"] \arrow[d, dotted, bend right, "f' = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle"'] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "\pi'"'] & B
\end{tikzcd}$$

- $f' = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle$ est l'unique morphisme t.q.
$$\begin{aligned} \pi \circ f' &= \pi \circ f \\ \pi' \circ f' &= \pi' \circ f. \end{aligned}$$
- f convient donc $f' = f$.
- Conclusion :
$$f = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle.$$
Ça s'appelle le *surjective pairing*.

Candidat iso

Preuve

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_1 B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] & \\
A & & B \\
 & A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Candidat iso

Preuve

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_1 B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] \arrow[dd, dotted, bend right, "f"'] & \\
A & & B \\
 & A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] \arrow[uu, dotted, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- $f = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_2$ *est l'unique morphisme t.q.*
$$\begin{array}{rcl} \pi_2 \circ f & = & \pi_1 \\ \pi'_2 \circ f & = & \pi'_1. \end{array}$$
- $g = \langle \pi_2, \pi'_2 \rangle_1$ *est l'unique morphisme t.q.*
$$\begin{array}{rcl} \pi_1 \circ g & = & \pi_2 \\ \pi'_1 \circ g & = & \pi'_2. \end{array}$$

C'est un iso

Preuve

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_1 B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] \arrow[d, dotted, bend right, "f"'] & \\
A & & B \\
 & A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] \arrow[u, dotted, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- *Or* $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ *par surj. pairing et*

C'est un iso

Preuve

$$\begin{tikzcd}
& A \times_1 B \arrow[dl, dashed, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] \arrow[dd, dashed, bend right, "f"'] & \\
A & & B \\
& A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] \arrow[uu, dashed, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- *Or* $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ *par surj. pairing et*

  $\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1$

C'est un iso

Preuve

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_1 B \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] & \\
A & A \times_2 B \arrow[l, dashed, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi'_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

- *Or* $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ *par surj. pairing et*
  $\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1$

C'est un iso

Preuve

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times_1 B \arrow[dl, dashed, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] & \\
A & & B \\
 & A \times_2 B \arrow[ur, "\pi'_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

- *Or* $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ *par surj. pairing et*

  $\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1$

C'est un iso

Preuve

$$
\begin{tikzcd}
& A \times_1 B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \\
A & & B \\
& A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] \arrow[uu, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

- *Or* $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ *par surj. pairing et*

$$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1 \qquad \textit{et} \qquad \pi'_1 \circ g \circ f = \pi'_1$$

(symétriquement).

C'est un iso

Preuve

$$\begin{tikzcd}
& A \times_1 B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \\
A & & B \\
& A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] \arrow[uu, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- *Or* $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ *par surj. pairing et*
  $$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1 \qquad \textit{et} \qquad \pi'_1 \circ g \circ f = \pi'_1$$
  (symétriquement).
- *Ainsi,* $g \circ f = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_1 = id_{A \times_1 B}$.

C'est un iso

Preuve

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times_1 B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \\
A & & B \\
 & A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] \arrow[uu, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

- *Or* $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ *par surj. pairing et*
  $$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1 \qquad \text{et} \qquad \pi'_1 \circ g \circ f = \pi'_1$$
  (symétriquement).
- *Ainsi,* $g \circ f = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_1 = id_{A \times_1 B}$.
- *Par symétrie,* $f \circ g = id_{A \times_2 B}$.

« Unique isomorphisme commutant »

Preuve

$$\begin{tikzcd} & A \times_1 B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi'_1"] \arrow[d, bend right, "f"'] & \\ A & & B \\ & A \times_2 B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] \arrow[u, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

- *On sait* $f = \langle \pi_2 \circ f, \pi'_2 \circ f \rangle_2 = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_2$,
- *donc tout iso* f', g' *tel que*

$$\pi_2 \circ f' = \pi_1 \qquad \pi'_2 \circ f' = \pi'_1$$
$$\pi_1 \circ g' = \pi_2 \qquad \pi'_1 \circ g' = \pi'_2$$

donne

$$f' = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_2 = f \qquad g' = \langle \pi_2, \pi'_2 \rangle_1 = g.$$

Bilan

- Existence de produits cartésiens dans Cl(Λ_{ST}).
- Catégories :
  - plein de conséquences gratuites et
  - l'assurance que tout va bien se passer.
- Suite : on va de même caractériser le λ catégoriquement.
  $\rightarrow$ notion de CCC.

Définition catégorique des exponentielles

On se place dans une catégorie cartésienne.

Définition

$f \times g = \langle f \circ \pi, g \circ \pi' \rangle$.

Définition catégorique des exponentielles

$$B^A \times A \xrightarrow{ev} B$$

(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Définition catégorique des exponentielles

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[rr, "ev"] & & B \\ C \times A \arrow[urr, "f"] & & \end{tikzcd}$$

(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Définition catégorique des exponentielles

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[rr, "ev"] & & B \\
C \times A \arrow[u, dotted, "\lambda(f) \times id_A"] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Définition catégorique des exponentielles

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[rr, "ev"] & & B \\
& & \\
C \times A \arrow[uu, dotted, "\lambda(f) \times id_A"] \arrow[uurr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Définition

Une catégorie est cartésienne fermée quand elle a tous les produits et toutes les exponentielles.

$\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ est cartésienne fermée

- Soient dans $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$: $\begin{array}{rcl} \Gamma & = & (x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m) \\ \Delta & = & (y_1 : \tau'_1, \ldots, y_n : \tau'_n). \end{array}$
- On définit $\Delta^\Gamma = \left(\begin{array}{lcl} y_1 & : & \tau_1 \to \ldots \to \tau_m \to \tau'_1, \\ \ldots, & & \\ y_n & : & \tau_1 \to \ldots \to \tau_m \to \tau'_n. \end{array}\right)$
- Evaluation : $\Delta^\Gamma, \Gamma \vdash \left(\begin{array}{l} y_1\ x_1 \ldots x_m, \\ \ldots, \\ y_n\ x_1 \ldots x_m \end{array}\right) : \Delta.$
- Curryfication de $\Theta, \Gamma \vdash \gamma : \Delta$ (avec $\gamma = (e_1, \ldots, e_n)$) :

$$\lambda(\gamma) = \left(\begin{array}{l} \lambda x_1 \ldots . \lambda x_m . e_1, \\ \ldots, \\ \lambda x_1 \ldots . \lambda x_m . e_n \end{array}\right) \text{ dans } \Theta \vdash \Delta^\Gamma.$$

$Cl(\Lambda_{ST})$ est cartésienne fermée (commutation)

$$
\begin{tikzcd}
\Delta^\Gamma \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\
\Theta \times \Gamma \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma) \times id_\Gamma"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
& ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) \\
&= ev \circ (\lambda(\gamma), id_\Gamma) \\
&= (\lambda(\gamma), id_\Gamma)^*(ev) \\
&= ((\lambda(x)_i.e)_j, (x)_i)^*(y\ (x)_i)_j \\
&= [(y \mapsto \lambda(x)_i.e)_j, (x \mapsto x)_i](y\ (x)_i)_j \\
&= ((\lambda(x)_i.e)\ (x)_i)_j \\
&=^{\textsc{Beta}}_{\Theta,\Gamma\vdash\Delta} (e)_j \\
&= \gamma.
\end{aligned}
$$

$Cl(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{tikzcd}
\Delta^\Gamma \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\
\Theta \times \Gamma \arrow[u, dashed, bend left, "\gamma' \times id_\Gamma"] \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma)\times id"'] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait

$$\begin{array}{lccl}
\Theta, \Gamma \vdash & ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) & = & ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \ \text{ donc} \\
\Theta, \Gamma \vdash & (e)_j & = & (e'\ (x)_i)_j \quad : \Delta.
\end{array}$$

Mais on a aussi :

$$e'_j \quad = \quad \lambda x_1.(e'_j\ x_1) \qquad (\text{ETA at } \tau_1 \to \ldots \tau_n \to \tau'_j)$$

$Cl(\Lambda_{ST})$ est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{tikzcd} \Delta^\Gamma \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\ \Theta \times \Gamma \arrow[u, dashed, bend left, "\gamma' \times id_\Gamma"] \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma)\times id"'] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

On sait

$$\begin{array}{lccl} \Theta, \Gamma \vdash & ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) & = & ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \quad \text{donc} \\ \Theta, \Gamma \vdash & (e)_j & = & (e'\ (x)_i)_j \quad : \Delta. \end{array}$$

Mais on a aussi :

$$e'_j \quad = \quad \lambda x_1.(e'_j\ x_1)$$

(ETA at $\tau_2 \to \ldots \tau_n \to \tau'_j$)

$Cl(\Lambda_{ST})$ est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{tikzcd}
\Delta^\Gamma \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\
\Theta \times \Gamma \arrow[u, dashed, bend left, "\gamma' \times id_\Gamma"] \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma)\times id"'] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait

$$\begin{array}{llcll}
\Theta, \Gamma \vdash & ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) & = & ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) \colon \Delta & \text{donc} \\
\Theta, \Gamma \vdash & (e)_j & = & (e'\ (x)_i)_j \quad : \Delta. &
\end{array}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{array}{lcll}
e'_j & = & \lambda x_1.(e'_j\ x_1) & \\
 & = & \lambda x_1.\lambda x_2.(e'_j\ x_1\ x_2) & (\text{ETA at } \tau_2 \to \ldots \tau_n \to \tau'_j)
\end{array}$$

$Cl(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{tikzcd}
\Delta^\Gamma \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\
\Theta \times \Gamma \arrow[u, dashed, bend left, "\gamma' \times id_\Gamma"] \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma)\times id"'] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait

$$\begin{aligned}
\Theta, \Gamma \vdash \; ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) &= ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \quad \text{donc} \\
\Theta, \Gamma \vdash \; (e)_j &= (e'\ (x)_i)_j \quad : \Delta.
\end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
e'_j &= \lambda x_1.(e'_j\ x_1) \\
&= \lambda x_1.\lambda x_2.{\color{red}(e'_j\ x_1\ x_2)}
\end{aligned}$$

$Cl(\Lambda_{ST})$ est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{\Gamma} \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\
\Theta \times \Gamma \arrow[u, dashed, bend left, "\gamma' \times id_{\Gamma}"] \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma)\times id"'] \arrow[ur, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

On sait

$$\begin{array}{lcll}
\Theta, \Gamma \vdash & ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_{\Gamma}) & = & ev \circ (\gamma' \times id_{\Gamma}) : \Delta \ \text{ donc} \\
\Theta, \Gamma \vdash & (e)_j & = & (e' \ (x)_i)_j \quad : \Delta.
\end{array}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{array}{rcl}
e'_j & = & \lambda x_1.(e'_j \ x_1) \\
 & = & \lambda x_1.\lambda x_2.(e'_j \ x_1 \ x_2) \\
\ldots & = & \lambda (x)_i.(e'_j \ (x)_i)
\end{array}$$

$\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$
\begin{tikzcd}
\Delta^{\Gamma} \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\
\Theta \times \Gamma \arrow[u, dashed, bend left, "\gamma' \times id_{\Gamma}"] \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma)\times id"'] \arrow[ur, "\gamma"']
\end{tikzcd}
$$

On sait

$$
\begin{array}{lccc}
\Theta, \Gamma \vdash & ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_{\Gamma}) & = & ev \circ (\gamma' \times id_{\Gamma}) : \Delta \;\text{ donc} \\
\Theta, \Gamma \vdash & (e)_j & = & (e' \; (x)_i)_j \quad : \Delta.
\end{array}
$$

Mais on a aussi :

$$
\begin{array}{lcc}
e'_j & = & \lambda x_1.(e'_j \; x_1) \\
 & = & \lambda x_1.\lambda x_2.(e'_j \; x_1 \; x_2) \\
\ldots & = & \lambda (x)_i.(e'_j \; (x)_i)
\end{array}
$$

Cl(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{tikzcd} \Delta^\Gamma \times \Gamma \arrow[r, "ev"] & \Delta \\ \Theta \times \Gamma \arrow[u, dashed, bend left, "\gamma' \times id_\Gamma"] \arrow[u, dotted, "\lambda(\gamma)\times id"'] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

On sait

$$\begin{array}{lccl} \Theta, \Gamma \vdash & ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) & = & ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \ \text{ donc} \\ \Theta, \Gamma \vdash & (e)_j & = & (e' \ (x)_i)_j \quad : \Delta. \end{array}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{array}{lcl} e'_j & = & \lambda x_1.(e'_j \ x_1) \\ & = & \lambda x_1.\lambda x_2.(e'_j \ x_1 \ x_2) \\ \ldots & = & \lambda (x)_i.\color{red}{(e'_j \ (x)_i)} \\ & = & \lambda (x)_i.\color{red}{e_j}. \end{array}$$

Unicité à unique iso commutant près

- Comme pour les produits, deux exponentielles sont toujours isomorphes.
- Il existe un unique iso entre elles commutant aux *ev*.
- Je vous épargne les détails.
- C'est un résultat catégorique général, pas seulement pour Cl(Λ_{ST}).

Bilan

- Au départ : construction très syntaxique de $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$.
- Remplacé par deux axiomes catégoriques :
  - existence de produits cartésiens et
  - existence d'exponentielles.
- Gratos (ni formalisé ni démontré, mais on voit non ?) :
  - La définition du λ-calcul simplement typé s'énonce maintenant en deux mots et en langue naturelle :

Définition

Le λ-calcul simplement typé est la théorie des CCC.

- Une définition (un peu moins) concise pour le λ-calcul non typé :

Définition

Le λ-calcul non typé est la CCC libre engendrée par un objet X, quotientée par l'égalité $X = X^X$.