Catégories 4: transformations naturelles et catégories monoïdales

Plan

- Désolé, apparemment, les transfos nats dans $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$ sont peut-être illuminantes, mais après un peu de boulot, qu'on va faire aujourd'hui.
- Quelques exemples élémentaires de transformations naturelles.
- Repassage rapide sur les exemples de la dernière fois.
- Variations sur les catégories monoïdales.
- Cohérence.

Slogan 1 sur les transformations naturelles

- Dans une catégorie concrète bien syntaxique comme $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$:
  - transformations naturelles sur $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}}) \to \mathbf{Set}$ $\approx$ constructions syntaxiques
  - naturalité $\approx$ « bonne cohabitation » avec la substitution.
- Dans une catégorie arbitraire $\mathcal{C}$:
  - les transformations naturelles sur $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ *définissent* les constructions ;
  - la naturalité donne en même temps la définition de substitution.

Ex : l'ensemble des formules du calcul des prédicats sur une $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$.

Slogan 2 sur les transformations naturelles

- Constructions définies par propriété universelle (ex : produits, exponentielles)
  $\Rightarrow$ transformations naturelles.
- Constructions définies par structure (ex : tenseur)
  $\not\Rightarrow$ transformations naturelles
  $\Rightarrow$ naturalité dans la structure.

Transformations naturelles

Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d] & F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
B & F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

« Premier » exemple

- On se place dans une catégorie $\mathcal{C}$.
- On définit la catégorie **2** par : $\bullet \longrightarrow \diamond$.
- Un foncteur de $\mathbf{2} \to \mathcal{C}$ est une flèche de $\mathcal{C}$.
- Une transformation naturelle entre $F, G : \mathbf{2} \to \mathcal{C}$ est

« Premier » exemple

- On se place dans une catégorie $\mathcal{C}$.
- On définit la catégorie **2** par : $\bullet \longrightarrow \diamond$.
- Un foncteur de $\mathbf{2} \to \mathcal{C}$ est une flèche de $\mathcal{C}$.
- Une transformation naturelle entre $F, G : \mathbf{2} \to \mathcal{C}$ est un carré commutatif dans $\mathcal{C}$

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] \\
\diamond
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(\bullet) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(\bullet \to \diamond)"'] & G(\bullet) \arrow[d, "G(\bullet \to \diamond)"] \\
F(\diamond) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(\diamond)
\end{tikzcd}
$$

Deuxième exemple

- On se place dans une catégorie $\mathcal{C}$.
- On considère la catégorie :
  - Objets : cones $\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$, i.e., foncteurs : $(\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \mathcal{C}$
  - Morphismes : Diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\ A \arrow[dd, dashed] & & B \arrow[dd, dashed] \\ & C' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A' & & B' \end{tikzcd}$$

, i.e., transformations naturelles sur $(\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \mathcal{C}$.

Deuxième exemple

- On fixe maintenant deux objets A et B.
- On considère la catégorie $ConeTo_{\mathcal{C}}(A, B)$:
  - Objets : cones $\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$, i.e., certains foncteurs : $(\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \mathcal{C}$
  - Morphismes : Diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\ A & & B \\ & C' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

, i.e., certaines transformations naturelles sur $(\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet) \rightarrow \mathcal{C}$.

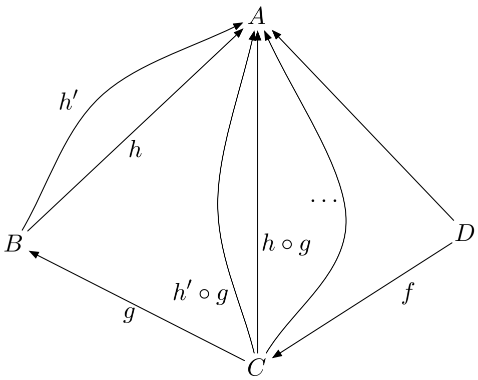
- Un produit cartésien de A et B est un objet terminal dans $ConeTo_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Objet terminal

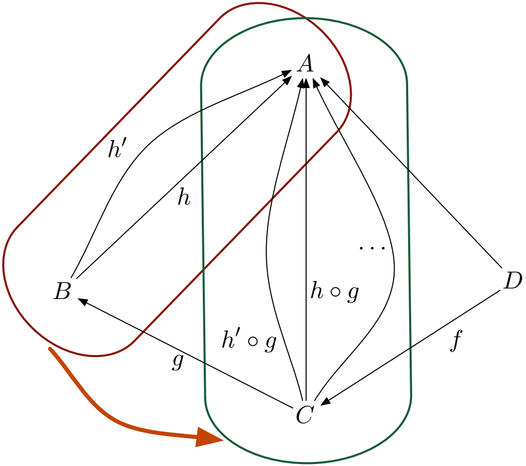
Définition

Un objet terminal 1 *dans une catégorie* $\mathcal{C}$ *est tel que pour tout objet* A*, il existe un unique morphisme* $A \longrightarrow 1$.

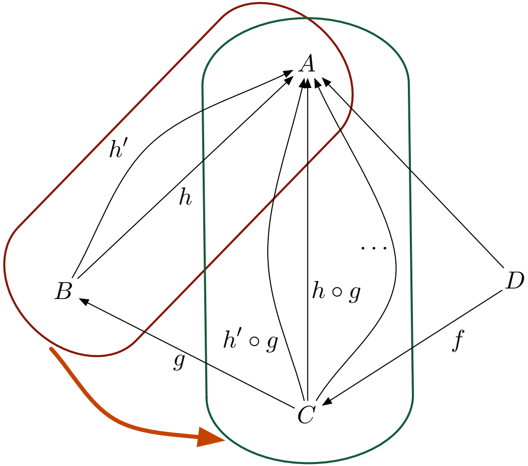
Yoneda embedding 1



Yoneda embedding 1

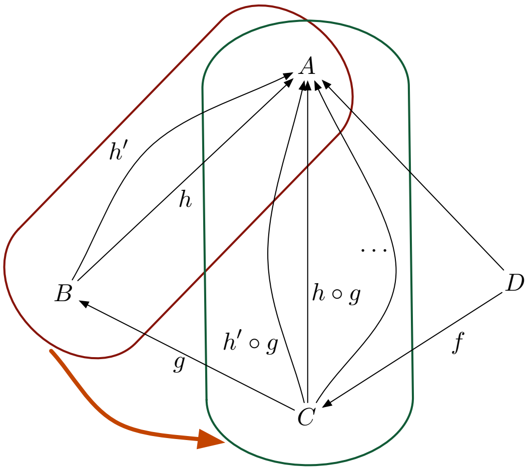


Yoneda embedding 1



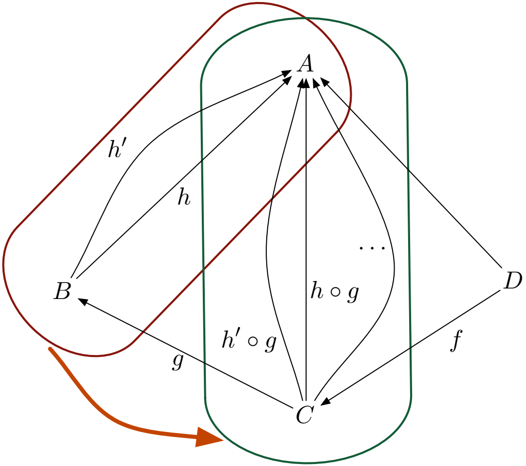
- Ensembles indexés par *Obj*($\mathcal{C}$).

Yoneda embedding 1



- Ensembles indexés par *Obj*($\mathcal{C}$).
- Morphismes oranges indexés par *Mor*($\mathcal{C}$).

Yoneda embedding 1

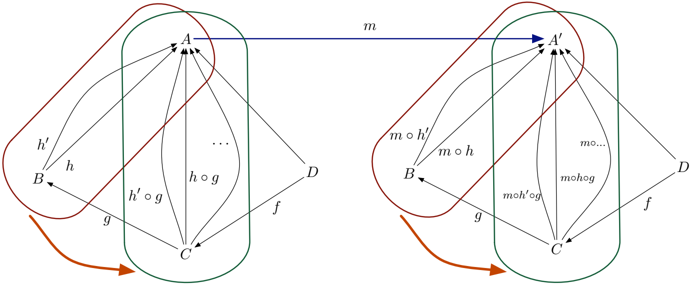


- Ensembles indexés par *Obj*$(\mathcal{C})$.
- Morphismes oranges indexés par *Mor*$(\mathcal{C})$.
- Foncteur de $\mathcal{C} \to$ **Set**, noté *yA*.

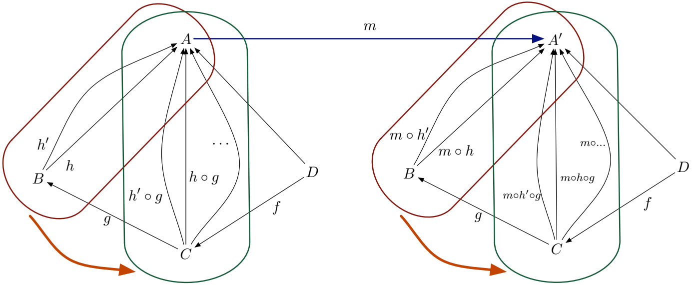
Yoneda embedding 2

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rrr, "m"] & & & A' & \\
B \arrow[ur, bend left, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & & D \arrow[ul] \arrow[dl, "f"] & B \arrow[ur, bend left, "m \circ h'"] \arrow[ur, "m \circ h"'] & & D \arrow[ul] \arrow[dl, "f"] \\
 & C \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, bend left, "h' \circ g"] \arrow[uu, "h \circ g"'] \arrow[uu, bend right, "\dots"'] & & & C \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, bend left, "m\circ h'\circ g"] \arrow[uu, "m\circ h\circ g"'] \arrow[uu, bend right, "m\circ\dots"'] &
\end{tikzcd}
$$

Yoneda embedding 2

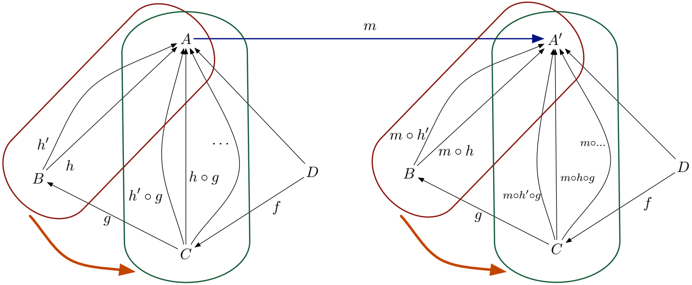


Yoneda embedding 2



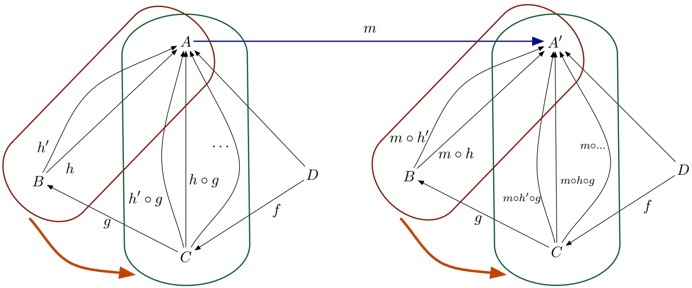
- Post-composition par *m* donne une image de *yA* dans *yA′*.

Yoneda embedding 2



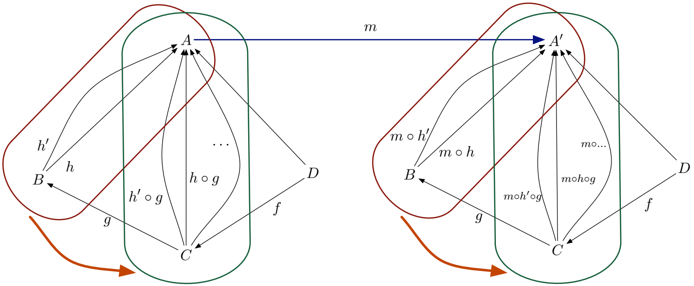
- Post-composition par *m* donne une image de *yA* dans *yA′*.
- Préserve l'indexation par *Obj*($\mathcal{C}$).

Yoneda embedding 2



- Post-composition par *m* donne une image de *yA* dans *yA′*.
- Préserve l'indexation par *Obj*($\mathcal{C}$).
- Préserve la pré-composition par $g : C \to B$.

Yoneda embedding 2



- Post-composition par m donne une image de yA dans yA'.
- Préserve l'indexation par $Obj(\mathcal{C})$.
- Préserve la pré-composition par $g : C \to B$.
- Transformation naturelle de $yA \to yA'$.

Yoneda sur un exemple : l'application

- Soient $\begin{pmatrix} \Delta & = & (x : \tau^{\tau'}, y : \tau') \\ \Delta' & = & (z : \tau) \end{pmatrix}$.
- La post-comp. voit l'application du λ-calcul

$$\gamma = (\Delta \vdash x\ y : \Delta')$$

comme la fonction $app_\Gamma = y\gamma_\Gamma$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \vdash \Delta & \longrightarrow & \Gamma \vdash \Delta' \\ (\Gamma \vdash (e, e') : \Delta) & \longmapsto & (\Gamma \vdash (e\ e') : \Delta') \end{array}$$

indexée par Γ.

Yoneda sur un exemple : l'application (suite)

- On a toujours $\left(\begin{array}{lcl} \Delta & = & (x : \tau^{\tau'}, y : \tau') \\ \Delta' & = & (z : \tau) \end{array}\right)$.
- La naturalité dit

$$
\begin{tikzcd}
(e, e') \arrow[rrr, dashed, mapsto] \arrow[ddd, dashed, mapsto] & & & (e\ e') \arrow[ddd, dashed, mapsto] \\
& \Gamma \vdash \Delta \arrow[r, "app_\Gamma"] \arrow[d, "\gamma''^*_\Delta"'] & \Gamma \vdash \Delta' \arrow[d, "\gamma''^*_{\Delta'}"] & \\
& \Gamma' \vdash \Delta \arrow[r, "app_{\Gamma'}"] & \Gamma' \vdash \Delta' & \\
(\gamma''^* e, \gamma''^* e') \arrow[rrr, dashed, mapsto] & & & \begin{array}{c} \gamma''^*(e\ e') = \\ ((\gamma''^* e)\ (\gamma''^* e')) \end{array}
\end{tikzcd}
$$

Plus compliqué : l'abstraction

- Pas exactement une transformation naturelle entre Yoneda embeddings $y(\cdot)$.
- $$\begin{array}{lllll} Hom(\cdot \times \tau' \; ; \; \tau) & : & Cl(\Lambda_{ST}) & \to & \mathbf{Set} \\ & & \Gamma & \mapsto & \Gamma, x : \tau' \vdash \tau \\ & & \gamma'' & \mapsto & \gamma'', x^* \end{array}$$

  Fonctorialité :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma & \Gamma, x : \tau' & \Gamma, x : \tau' \vdash \tau \arrow[d, swap, "(\gamma'', x)^*"] \arrow[d, "= \gamma''^* + {[x \mapsto x]}"] \\
\Gamma' \arrow[u, "\gamma''"] & \Gamma', x : \tau' \arrow[u, "{\gamma'', x}"] & \Gamma', x : \tau' \vdash \tau \arrow[d, swap, "(\gamma''', x)^*"] \arrow[d, "= \gamma'''^* + {[x \mapsto x]}"] \\
\Gamma'' \arrow[u, "\gamma'''"] & \Gamma'', x : \tau' \arrow[u, "{\gamma''', x}"] & \Gamma'', x : \tau' \vdash \tau
\end{tikzcd}$$

Plus compliqué : l'abstraction

- Soit $abs_\Gamma^{\tau',\tau}$: $\begin{array}{ccc} \Gamma, x : \tau' \vdash \tau & \longrightarrow & \Gamma \vdash \tau^{\tau'} \\ \Gamma, x : \tau' \vdash e : \tau & \longmapsto & \Gamma \vdash \lambda x.e : \tau^{\tau'}. \end{array}$

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma & e \arrow[rrr, mapsto, dashed] \arrow[ddd, mapsto, dashed] & & & \lambda x.e \arrow[ddd, mapsto, dashed] \\
& & \Gamma, x : \tau' \vdash \tau \arrow[r, "abs_\Gamma"] \arrow[d, "(\gamma'', x)^*"'] & \Gamma \vdash \tau^{\tau'} \arrow[d, "\gamma''^*"] & \\
& & \Gamma', x : \tau' \vdash \tau \arrow[r, "abs_{\Gamma'}"] & \Gamma' \vdash \tau^{\tau'} & \\
\Gamma' \arrow[uuu, "\gamma''"] & \gamma''^* e \arrow[rrr, mapsto, dashed] & & & \gamma''^*(\lambda x.e) = \lambda x.\gamma''^* e
\end{tikzcd}
$$

- Rappel pour la capture.
  - On a écrit $\Gamma, x : \tau$ et $\Gamma', x : \tau$.
  - $\rightarrow$ Implicitement, x n'apparaît pas dans Γ ou Γ'.

Plus compliqué : l'abstraction

- Soit $abs_\Gamma \;:\; \begin{array}{rcl} \Gamma, x : \tau' \vdash \tau & \longrightarrow & \Gamma \vdash \tau^{\tau'} \\ \Gamma, x : \tau' \vdash e : \tau & \longmapsto & \Gamma \vdash \lambda x.e : \tau^{\tau'}. \end{array}$

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma & e \arrow[rrr, mapsto, dashed] \arrow[ddd, mapsto, dashed] & & & \lambda x.e \arrow[ddd, mapsto, dashed] \\
& & \Gamma, x : \tau' \vdash \tau \arrow[r, "abs_\Gamma"] \arrow[d, "(\gamma'', x)^*"'] & \Gamma \vdash \tau^{\tau'} \arrow[d, "\gamma''^*"] & \\
& & \Gamma', x : \tau' \vdash \tau \arrow[r, "abs_{\Gamma'}"] & \Gamma' \vdash \tau^{\tau'} & \\
\Gamma' \arrow[uuu, "\gamma''"] & \gamma''^* e \arrow[rrr, mapsto, dashed] & & & \gamma''^*(\lambda x.e) = \lambda x.\gamma''^* e
\end{tikzcd}
$$

- Rappel pour la capture.
  - On a écrit $\Gamma, x : \tau$ et $\Gamma', x : \tau$.
  - $\rightarrow$ Implicitement, x n'apparaît pas dans Γ ou Γ'.

Le retour du fils du slogan 1

- Dans une catégorie concrète bien syntaxique comme $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$:
  - transformations naturelles sur $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}}) \to \mathbf{Set}$ $\approx$ constructions syntaxiques
  - naturalité $\approx$ « bonne cohabitation » avec la substitution.
- Dans une catégorie arbitraire $\mathcal{C}$:
  - les transformations naturelles sur $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ *définissent* les constructions ;
  - la naturalité donne en même temps la définition de substitution.

Ex : l'ensemble des formules du calcul des prédicats sur une $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$.

Le retour du fils du slogan 2

- Constructions définies par propriété universelle (ex : produits, exponentielles)
  $\Rightarrow$ transformations naturelles.
- Constructions définies par structure (ex : tenseur)
  $\not\Rightarrow$ transformations naturelles
  $\Rightarrow$ naturalité dans la structure.

Exercice

- Soit $\mathcal{C}$ cartésienne.
- On suppose choisi un foncteur produit $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.
- Montrer que pour tous objets A, B il induit une transformation naturelle de $Hom(\cdot\ ;\ A) \times Hom(\cdot\ ;\ B)$ dans $Hom(\cdot\ ;\ A \times B)$.

Catégories monoïdales

Définition

Une catégorie monoïdale est une catégorie $\mathcal{C}$ équipée d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, d'un objet $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$, et d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B,C} &: A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C \\ \lambda_A &: \mathcal{I} \otimes A \to A \\ \rho_A &: A \otimes \mathcal{I} \to A \end{aligned}$$

tels que les 3 diagrammes de cohérence suivants commutent.

Transformations naturelles

Catégories monoïdales

Diagrammes de cohérence

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id_A \otimes \alpha"'] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha"] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha \otimes id_A"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes B) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "id_A \otimes \lambda"'] & & (A \otimes I) \otimes B \arrow[dl, "\rho \otimes id_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\lambda"'] & & I \otimes I \arrow[dl, "\rho"] \\
& I &
\end{tikzcd}
$$

Catégories monoïdales strictes

Définition

Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est stricte ssi

- $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$,
- $I \otimes A = A = A \otimes I$ *et*
- α, ρ, λ *sont des identités.*

Catégories monoïdales commutatives

Définition

Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ *est commutative ssi elle vient avec un isomorphisme* $\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ *(désolé pour la collision de notation) tel que les trois diagrammes de cohérence suivants commutent.*

Premières propriétés

- Interchange law et whiskering.
- Représentation graphique avec et sans boîtes.
- Naturalité.