Catégories 6: cohérence monoïdale symétrique et close

Catégories monoïdales

Définition

Une catégorie monoïdale est une catégorie $\mathcal{C}$ équipée d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, d'un objet $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$, et d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B,C} &: A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C \\ \lambda_A &: \mathcal{I} \otimes A \to A \\ \rho_A &: A \otimes \mathcal{I} \to A \end{aligned}$$

tels que les 3 diagrammes de cohérence suivants commutent.

Diagrammes de cohérence

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id_A \otimes \alpha"'] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha"] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha \otimes id_A"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes B) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "id_A \otimes \lambda"'] & & (A \otimes I) \otimes B \arrow[dl, "\rho \otimes id_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\lambda"'] & & I \otimes I \arrow[dl, "\rho"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Catégories monoïdales strictes

Définition

Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est stricte ssi

- $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$,
- $I \otimes A = A = A \otimes I$ *et*
- α, ρ, λ *sont des identités.*

Cohérence monoïdale

On rappelle de très haut l'énoncé et la preuve du

Théorème (Mac Lane)

Tous les diagrammes structurels monoïdaux commutent.

Objets et morphismes structurels

Définition

Objets et morphismes structurels *: objets et morphismes formels donnés par la structure de catégorie monoïdale.*

- Ex : identités, composition, tenseur, associativité, élimination des neutres.
- On peut les évaluer dans la catégorie sous-jacente.
- Notion de foncteur monoïdal strict : préservation stricte de la structure monoïdale.

Diagrammes structurels

Définition

Un diagramme structurel *est (un peu restrictif) une paire de morphismes structurels de même domaine et codomaine.*

Il dénote a priori une paire de morphismes dans C, et le théorème de Mac Lane montre que les deux composantes de cette paire s'évaluent toujours pareil.

Cohérence pour les catégorie monoïdales

- Première version de la cohérence, pour un objet.

Définition

W est la catégorie suivante.

Objets : *les termes formés à partir de I et $\otimes$, plus une constante $\_$.*

Morphismes de $w \to w'$:

- *$\{\bullet\}$ si w et w' ont autant de $\_$,*
- *$\emptyset$ sinon.*

Théorème

Pour tout objet A de $\mathcal{C}$ monoïdale, $\exists!$ foncteur monoïdal strict de $W \to \mathcal{C}$ envoyant $\_$ sur A.

Confluence et standardisation catégoriques

Notion de morphisme structurel *positif*
→ normalisation forte.

Deux morphismes structurels (pas forcément positifs)

$$
\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[d, "*"] & & A_n \arrow[d, "*"] \\
\widehat{A}_0 \arrow[rr, equal] & & \widehat{A}_n
\end{tikzcd}
$$

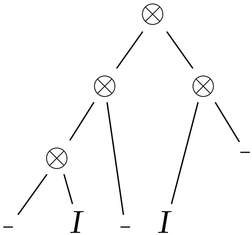
Normalisation (associativité à gauche, élimination des I)

Confluence et standardisation catégoriques

- Sorte de réécriture.
- Le chemin suivi est important.
- Les trois diagrammes de cohérence correspondent aux trois paires critiques.

Polymorphisme catégorique

- Extension à toute catégorie monoïdale, par la construction *It*$(\mathcal{C})$.
- Ex :



est vu comme un foncteur de $\mathcal{C}^3 \to \mathcal{C}$

$$\approx \forall X \forall Y \forall Z.(((X \otimes I) \otimes Y) \otimes (I \otimes Z)).$$

- Cette catégorie *It*$(\mathcal{C})$ est monoïdale.

Polymorphisme catégorique

- Tous les morphismes structurels de $\mathcal{C}$ se voient avec
  - le foncteur identité $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$,
  - le foncteur constant $I : 1 \to \mathcal{C}$,
  - le produit tensoriel dans *It*$(\mathcal{C})$,

  et les transformations naturelles structurelles de *It*$(\mathcal{C})$, i.e.,
- tous les morphismes structurels de $\mathcal{C}$ se voient dans l'image de *W* par

$$\_ \mapsto id.$$

- Or dans *W*, y en a qu'un entre deux objets.
- Donc dans $\mathcal{C}$ aussi.

Catégorie monoïdale libre

Définition

Etant donné un ensemble B, on définit MC(B) comme la catégorie :

Objets : *objets structurels de $\mathcal{C}$.*

Morphismes de $w \to w'$:

- $\{\bullet\}$ *si les mots sous-jacents sont égaux,*
- $\emptyset$ *sinon.*

Théorème

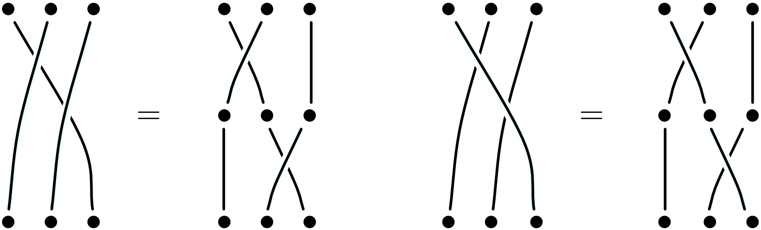
Soit $\mathcal{C}$ monoïdale. Il existe un unique foncteur monoïdal strict de $MC(Obj(\mathcal{C})) \to \mathcal{C}$ identité sur $Obj(\mathcal{C})$.

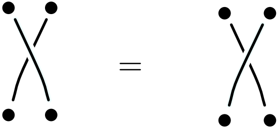
Catégories monoïdales symétriques

Définition

Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ *est* symétrique *ssi elle vient avec un isomorphisme naturel* $\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ *(désolé pour la collision de notation) tel que les trois diagrammes de cohérence suivants commutent.*

Catégories monoïdales symétriques

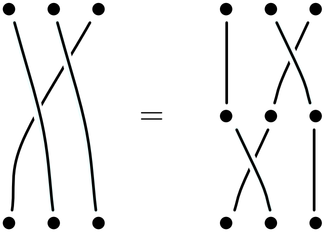




Si on vire le dernier, c'est seulement une *catégorie tressée*.
Exercice : écrivez ces axiomes formellement.

Exercice

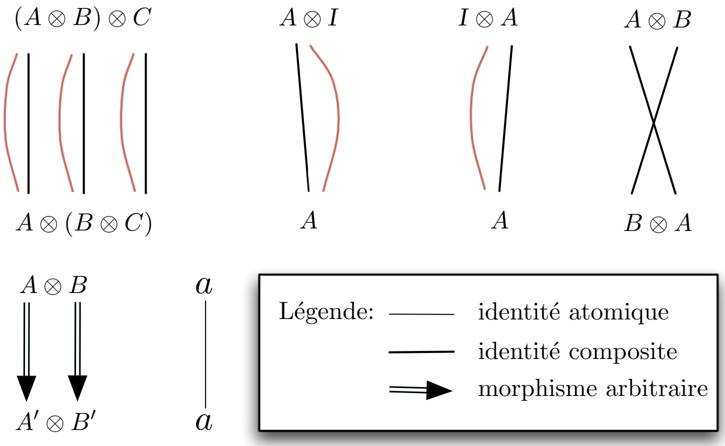
Montrer que dans toute catégorie tressée, on a



Indication : définir formellement les deux morphismes.

Catégorie monoïdale symétrique libre

SMC(*B*) engendrée par un ensemble d'objets *B* (+ compo.) :



Initialité

- Notion de *foncteur monoïdal symétrique strict*. (Préservation de la structure $\alpha, \rho, \lambda, \gamma$.)
- Initialité de la construction :

Théorème

Soit C symétrique monoïdale.
Il existe un unique foncteur monoïdal symétrique strict de SMC(Obj(C)) $\to C$ identitié sur les objets de C.

- On n'a plus forcément commutation des diagrammes structurels.
- Caractérisation de la commutation de diagrammes structurels dans une SMC.

Catégories monoïdales closes

Définition

Une catégorie monoïdale est close ssi pour tous objets A et B il existe un objet $A \multimap B$ et un morphisme $ev_{A,B} : (A \multimap B) \otimes A \to B$ tel que pour tout $f : C \otimes A \to B$, il existe $\lambda(f) : C \to A \multimap B$ tel que

$$\begin{tikzcd}
(A \multimap B) \otimes A \arrow[r, "ev"] & B \\
C \otimes A \arrow[u, "\lambda(f) \otimes id_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

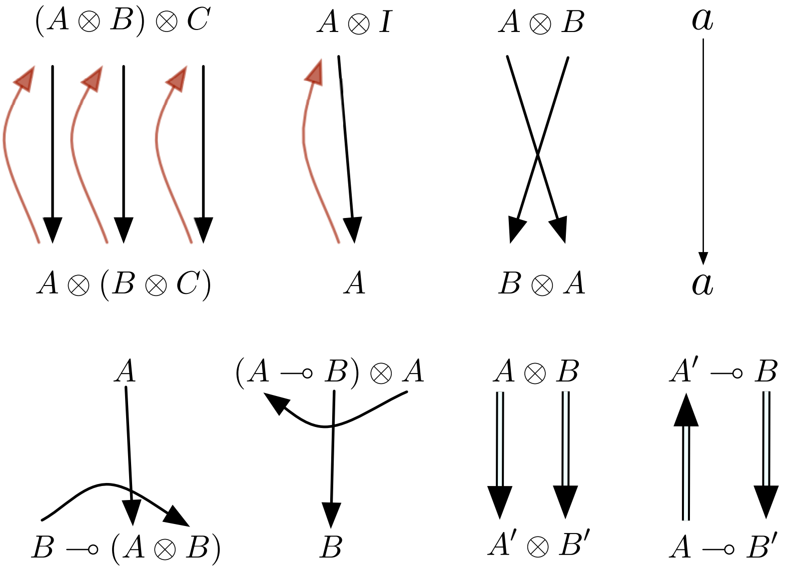
commute.

Graphes de Kelly - Mac Lane

- On va s'intéresser aux catégories monoïdales symétriques closes dans la suite (SMCC).
- A cause des objets $A \multimap B$, il faut orienter les fils.

Catégorie monoïdale symétrique close libre

$K(B)$ engendrée par un ensemble B (+ compo.) :



Graphes de Kelly - Mac Lane

Plus formellement, on construit une « pré-SMCC » libre *preK*(B) sur un ensemble d'objets de base B.

- On considère les AST de formules de IMLL avec ces objets comme atomes (connecteurs : $\otimes, \multimap, I$).
- On attache une polarité $\{+, -\}$ à chaque atome selon le nombre de passages à gauche d'un $\multimap$.
- Un morphisme de $F \to F'$ est un graphe orienté dont les noeuds sont les feuilles de F et F' t.q., en inversant les signes dans F :
  - chaque feuille négative est source d'exactement une arête et but d'aucune
  - chaque feuille positive est source d'aucune arête et but d'exactement une.

Composition dans $preK(B)$

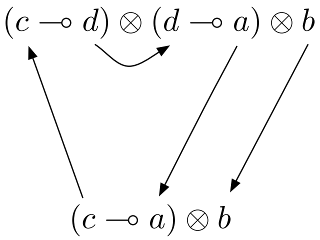
- Composition de $F \xrightarrow{f} F' \xrightarrow{g} F''$ = composition des arêtes à travers F'.
- Remarque
  - Chaque feuille de F' a exactement une arête entrante et une arête sortante.
  - Donc un chemin entrant dans F' ne peut pas boucler.
  - Par contre : il peut y avoir des chemins internes à F' qui bouclent. Par définition de la composition, on les oublie.

$K(B)$

$K(B)$ est ensuite définie comme la sous-catégorie de $preK(B)$ où on ne garde que les morphismes du dessin précédent.

Exercice

- Donner un morphisme de $((c \multimap a) \otimes b) \to ((b \multimap c) \multimap a)$.
- Pré-composer par



- Faire le calcul.

Composabilité

Théorème

La composition de deux morphismes de $K(B)$ n'oublie pas de cycle interne.

Initialité

Théorème

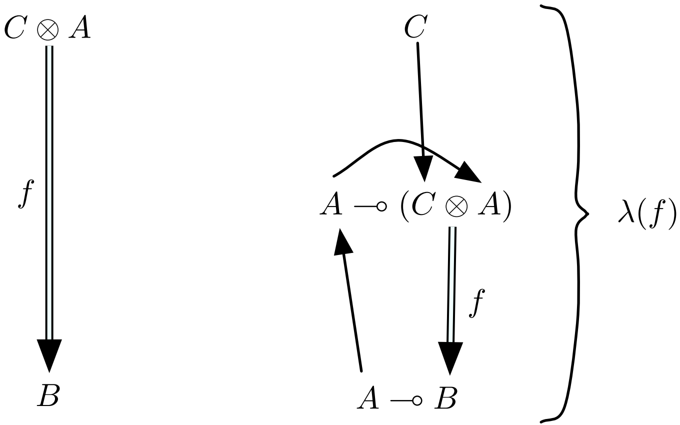
$K(B)$ est une catégorie symétrique monoïdale close.

Théorème

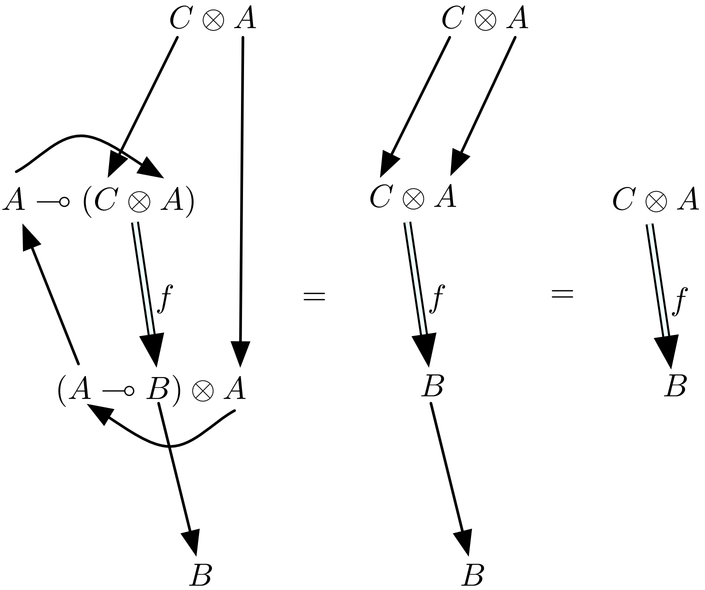
Pour toute catégorie symétrique monoïdale close $\mathcal{C}$, il existe un unique foncteur symétrique monoïdal clos strict de $K(Obj(\mathcal{C})) \to \mathcal{C}$.

Caractérisation de l'égalité des morphismes structurels dans une SMCC.

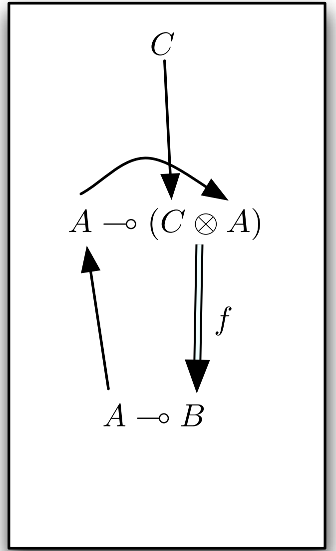
$K(B)$ est close : curryfication



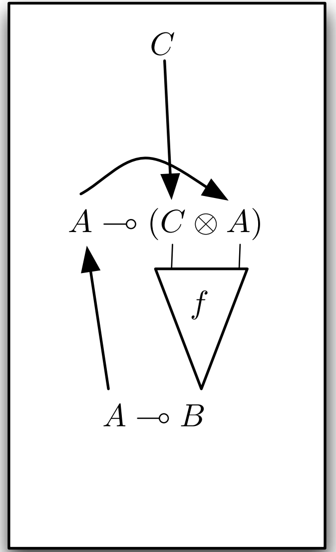
$K(B)$ est close : évaluation



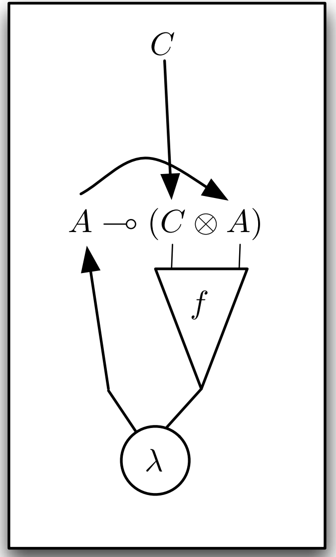
$K(B)$: rapport avec le λ-calcul linéaire



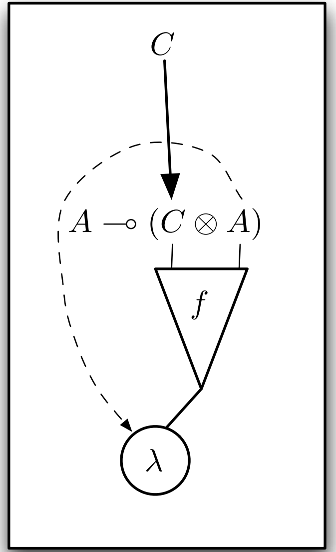
$K(B)$: rapport avec le λ-calcul linéaire



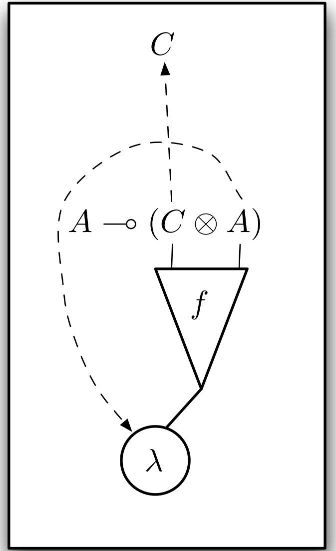
$K(B)$: rapport avec le λ-calcul linéaire



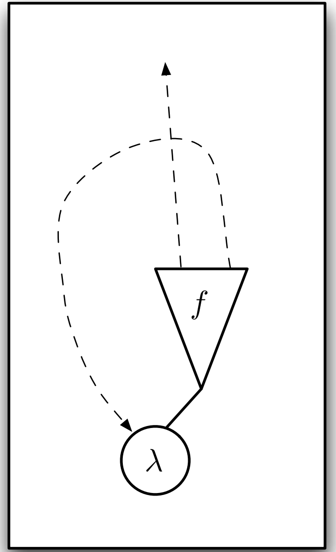
$K(B)$: rapport avec le λ-calcul linéaire



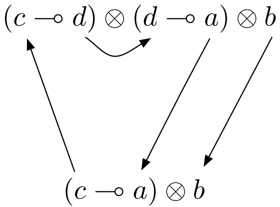
$K(B)$: rapport avec le λ-calcul linéaire



$K(B)$: rapport avec le λ-calcul linéaire

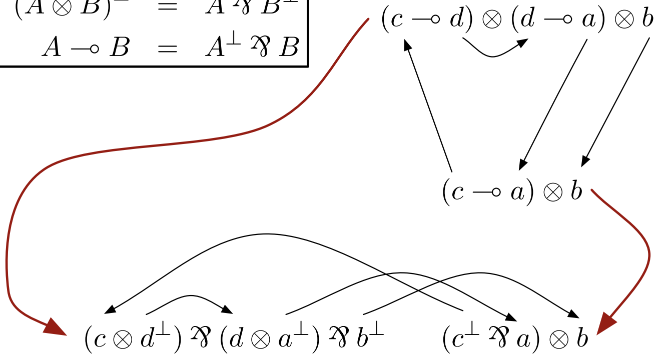


$K(B)$: rapport avec les réseaux de preuves MLL



$K(B)$: rapport avec les réseaux de preuves MLL

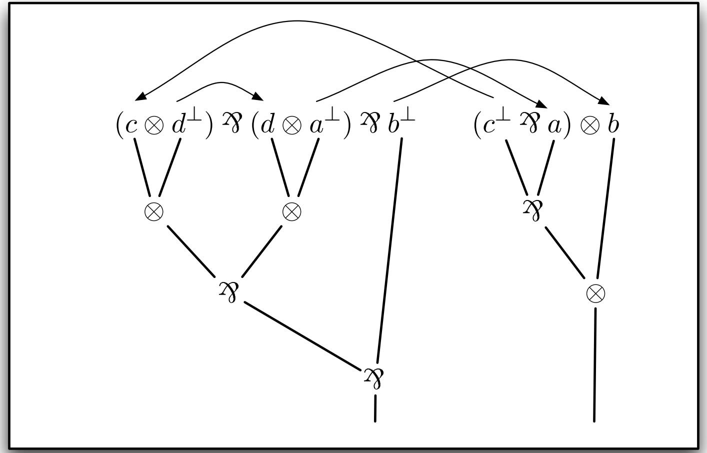
$$
\begin{aligned}
(A \multimap B)^\perp &= A \otimes B^\perp \\
(A \otimes B)^\perp &= A \parr B^\perp \\
A \multimap B &= A^\perp \parr B
\end{aligned}
$$



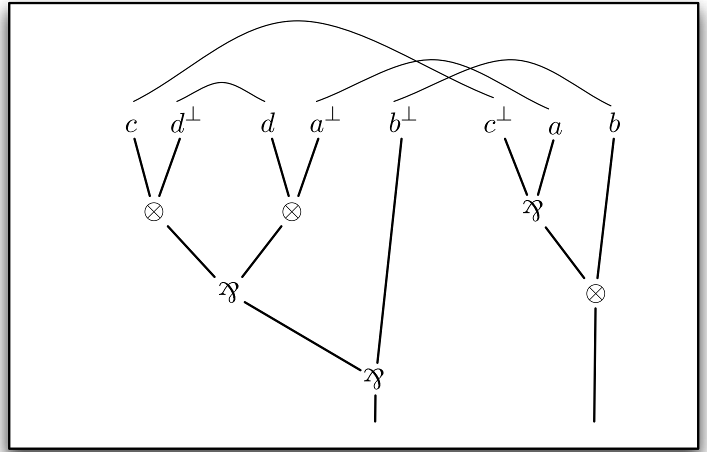
$K(B)$: rapport avec les réseaux de preuves MLL

$$(c \otimes d^{\perp}) \parr (d \otimes a^{\perp}) \parr b^{\perp} \qquad (c^{\perp} \parr a) \otimes b$$

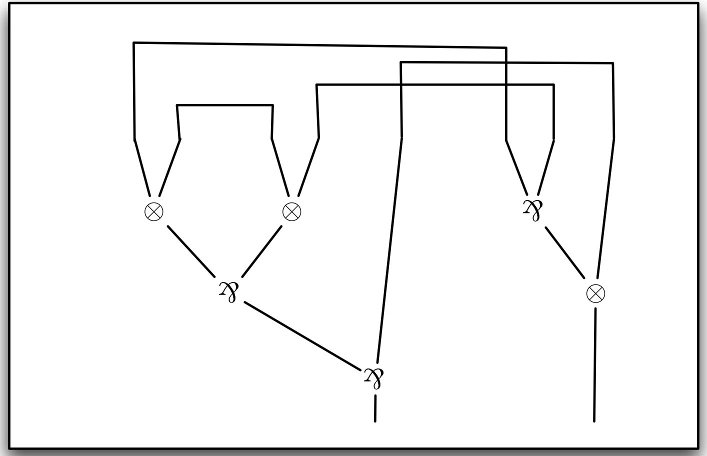
$K(B)$: rapport avec les réseaux de preuves MLL



$K(B)$: rapport avec les réseaux de preuves MLL



$K(B)$: rapport avec les réseaux de preuves MLL



SMCC et plus

- SMCC $\Leftrightarrow$ logique linéaire intuitionniste (IMLL).
- Logique linéaire classique (MLL) : plus riche encore, catégories $*$-autonomes (Barr).
  SMCC avec un objet dualisant $\perp$, tel que $(A \multimap \perp) \multimap \perp \cong A$ (plus des conditions de cohérence).
- Modèles catégoriques antérieurs à LL, redécouverts en tant que tels.
- Ce que ne faisaient pas les modèles catégoriques avant LL :
  - critères de correction graphiques,
  - combinaison linéaire / non linéaire.

Catégories d'ordre supérieur (teaser)

- Un monoïde est une catégorie à un objet.
- On va montrer qu'une catégorie monoïdale est une 2-catégorie à un objet.

Cette section va rester informelle.

2-catégories

$A \qquad\qquad B \qquad\qquad C$

Objets

2-catégories

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & B \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & C
\end{tikzcd}
$$

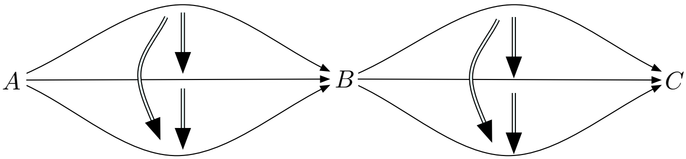
1-cellules (Morphismes)

2-catégories

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow"] & B \arrow[r, bend left=50] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

2-cellules

2-catégories



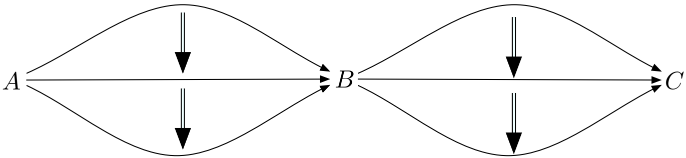
Composition verticale

2-catégories

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left=50] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & B \arrow[r, bend left=50] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & C
\end{tikzcd}$$

Composition verticale

2-catégories



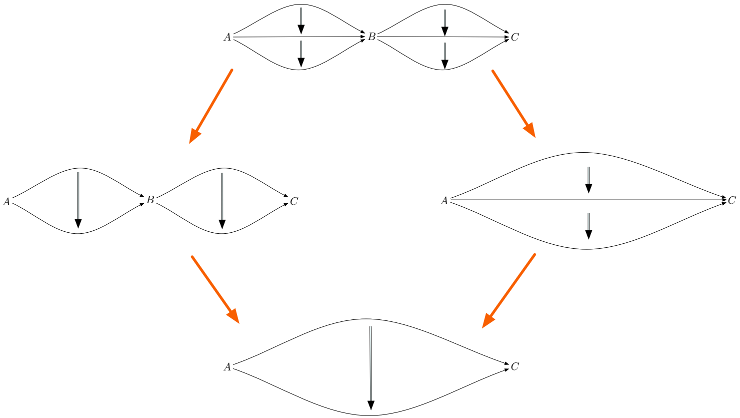
2-cellules

2-catégories

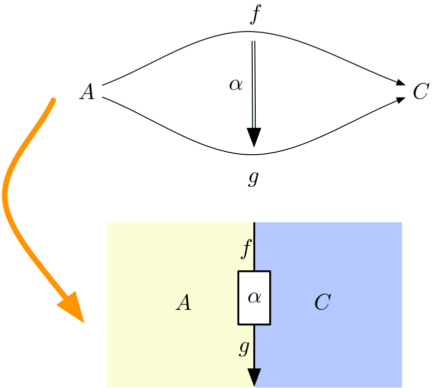
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=50, ""{name=U, below}] \arrow[r, ""{name=M, above}] \arrow[r, ""{name=N, below}, phantom] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D, above}] & C \arrow[Rightarrow, from=U, to=M] \arrow[Rightarrow, from=N, to=D] \end{tikzcd}$$

Composition horizontale

Interchange law



Simili dualité de Poincaré



Une catégorie monoïdale stricte est une 2-catégorie monochrome (à un objet).

Exemples

- Vous connaissez (presque) la *walking 2-category*. Des idées ?
- Le λ-calcul, quand on remplace l'égalité par des réductions, voire par des chemins de réduction.

Kek tortues

- On peut définir comme ça les *n*-catégories.
- Une $n+1$-catégorie est un ensemble d'objets avec entre deux objets une *n*-catégorie telle que ...
- Il y a plein de définitions (≥ 10) d'origines indépendantes : topologie, logique, géométrie.
- Certaines vont jusqu'à l'infini (ω-catégories).
- Sujet de recherche : comparer formellement les définitions.

De la structure sur les catégories . . .

Catégories	
cartésiennes	
cartésiennes fermées	
monoïdales	
monoïdales symétriques	
monoïdales symétriques closes	

. . .

. . . et les foncteurs qui vont avec

Catégories	Foncteurs
cartésiennes	cartésiens
cartésiennes fermées	cartésiens fermés
monoïdales	monoïdaux
monoïdales symétriques	monoïdaux symétriques
monoïdales symétriques closes	monoïdaux symétriques clos

. . .

- Structure sur **Cat**, la catégorie des catégories.
- Morphismes préservant (éventuellement à iso près) la structure.
- cf.

Ensembles	Morphismes
monoïdes	de monoïdes
groupes	de groupes
anneaux	. . .

- Structure sur **Set**, la catégorie des ensembles, avec des morphismes la préservant.

Monades ?

- Structure ensembliste $\Leftrightarrow$ *Monade*.
- Structure catégorique $\Leftrightarrow$ *Monade*.
- Ah ouais, ça a l'air cool les monades, ça fait tout.
- Et même plus : **Cat** est en fait une 2-catégorie $\Rightarrow$ 2-monades . . .

Doctrines

- Une sous 2-catégorie de **Cat** définie par une monade s'appelle une *doctrine* (encore Lawvere).
- On va pas faire le cas général (je sais pas faire).
- Mais pour faire des sous 2-catégories de **Cat** avec notre tableau

Catégories	Foncteurs
cartésiennes	cartésiens
cartésiennes fermées	cartésiens fermés
monoïdales	monoïdaux
monoïdales symétriques	monoïdaux symétriques
monoïdales symétriques closes	monoïdaux symétriques clos

…

il faut dire comment on restreint les transformations naturelles.

Foncteurs monoïdaux faibles

Définition

Un foncteur monoïdal (faible) est un foncteur qui préserve la structure monoïdale à iso près.
Plus explicitement, c'est un foncteur F muni de deux isos naturels Φ et ϕ qui font commuter :

Foncteurs monoïdaux faibles

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes (F(B) \otimes F(C)) \arrow[r, "\alpha_{F(A),F(B),F(C)}"] \arrow[d, "id_A \otimes \Phi_{B,C}"'] & (F(A) \otimes F(B)) \otimes F(C) \arrow[d, "\Phi_{A,B} \otimes id_C"] \\
F(A) \otimes F(B \otimes C) \arrow[d, "\Phi_{A,(B\otimes C)}"'] & G(A \otimes B) \arrow[d, "\Phi_{(A\otimes B),C}"] \\
F(A \otimes (B \otimes C)) \arrow[r, "F(\alpha_{A,B,C})"] & F((A \otimes B) \otimes C)
\end{tikzcd}$$

Foncteurs monoïdaux faibles

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes F(A) \arrow[d, "\phi \otimes F(A)"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_{F(A)}"] & \\
F(I) \otimes F(A) \arrow[d, "\Phi_{I,A}"'] & \\
F(I \otimes A) \arrow[r, "F(\lambda_A)"] & F(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \otimes I \arrow[d, "F(A) \otimes \phi"'] \arrow[ddr, bend left, "\rho_{F(A)}"] & \\
F(A) \otimes F(I) \arrow[d, "\Phi_{A,I}"'] & \\
F(I \otimes A) \arrow[r, "F(\rho_A)"] & F(A)
\end{tikzcd}
$$

Transformations naturelles monoïdales

Définition

Une transformation naturelle β entre deux foncteurs monoïdaux (F, Φ, ϕ) et (G, Γ, γ) est monoïdale ssi les diagrammes suivants commutent

Transformations naturelles monoïdales

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes F(B) \arrow[r, "\beta_A \otimes \beta_B"] \arrow[d, "\Phi_{A,B}"'] & G(A) \otimes G(B) \arrow[d, "\Gamma_{A,B}"] \\
F(A \otimes B) \arrow[r, "\beta_{A \otimes B}"'] & G(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
F(I) \arrow[rr, "\beta_I"] & & G(I)
\end{tikzcd}$$

Exercice

Qu'est-ce qui manque à un $\otimes$ symétrique pour être cartésien ? Indication : un duplicateur et un effaceur, tels que quoi ?