The Structure of Call-by-Value

Carsten Führmann

Compte-rendu par Tom Hirschowitz

Formalisation des langages avec effets

Approche classique

- Configurations globales : (e, S), une expression + un *store*.
- Règles globales :

$$((x := v; e), S) \longrightarrow (e, S\langle x \mapsto v\rangle).$$

Impossible de raisonner sur le langage source (ex : évaluation partielle, ...).

Idée

Définir la sémantique des langages avec effets *par* les égalités valides au niveau source.

Egalité valide : qui préserve le comportement.

Idée de base

- Le truc dur, dans un langage avec effets (ici, cbv) : quand l'

Equation litigieuse

$$\mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}\ e' \sim [x \mapsto e](e')$$

est-elle valide ?

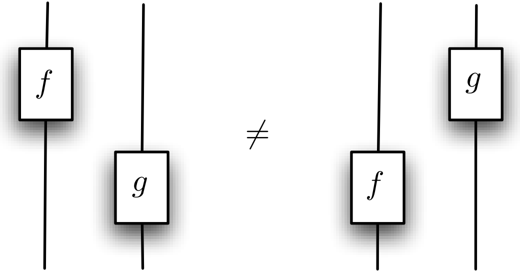
- Exemples cruciaux de e' (avec paires et λ) :

e'	$\mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}\ e'$	$[x \mapsto e](e')$
(x, x)	$\mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}\ (x, x)$	(e, e)
$()$	$\mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}\ ()$	$()$
$\mathtt{let}\ y = e''$ $\mathtt{in}\ (x, y)$	$\mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}$ $\mathtt{let}\ y = e''\ \mathtt{in}$ (x, y)	$\mathtt{let}\ y = e''\ \mathtt{in}$ (e, y)

Catégories binoïdales

- Une structure de catégorie presque monoïdale.
- Seule différence : $\otimes$ se décompose en deux.
- On écrit :
  - $A \otimes B$: il y a un objet tenseur,
  - $f \otimes B$: il y a un whiskering à gauche,
  - $A \otimes g$: il y a un whiskering à droite,

mais



en général.

Catégories pseudocartésiennes

Définition

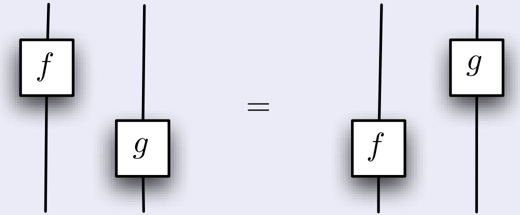
Une catégorie pseudocartésienne est une catégorie binoïdales avec de la structure de catégorie cartésienne, mais sans les propriétés qui vont avec :

- *un objet I et*
- *des morphismes indexés par les (paires d') objets*
  - $\delta : A \to A \otimes A$,
  - $\pi : A \otimes B \to A$,
  - $\pi' : A \otimes B \to B$,
  - $!_A : A \to I$.

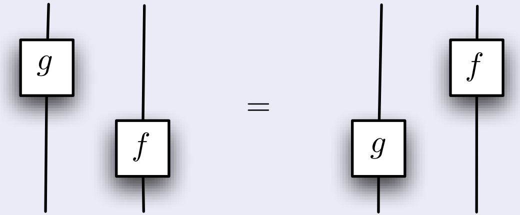
Ça permet de faire semblant de permuter un produit (γ), d'associer à droite ou à gauche (α), mais sans savoir trop ce que ça fait.

Définition (Centralité)

f est central *ssi pour tout g :*

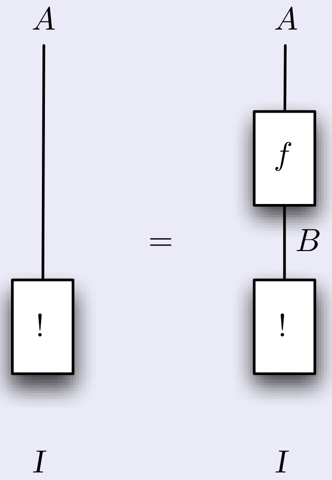


et



Définition (Discardabilité)

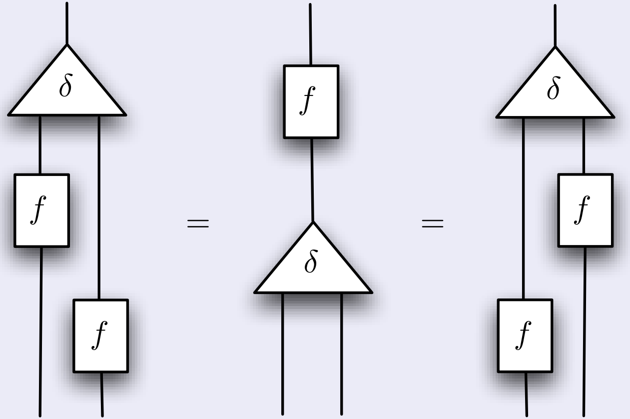
*f est **discardable** ssi*



Si on n'utilise pas son résultat, pas la peine de le calculer.

Définition (Copiabilité)

f est copiable ssi



Focus

Définition

Le focus d'une catégorie pseudocartésienne est l'ensemble des morphismes centraux, discardables et copiables.

- En gros, c'est ceux qui ne font pas d'effets.
- Une catégorie précartésienne est une catégorie pseudocartésienne dont le focus se comporte bien.

Axiomes additionnels

Les programmes sans effets ne posent pas de problèmes :

Axiome additionnel (i)

La restriction de la structure prémonoïdale au focus est cartésienne.

Ex : $\pi(v, v') \sim v$.

Axiomes additionnels

L'associativité et la commutativité du $\otimes$ ne posent pas de problèmes :

Axiome additionnel (ii)

α et γ sont naturelles sur tous les morphismes.

Ex :

$$x : A \otimes (y : B \otimes z : C)$$

$$\vdash \begin{array}{l}\texttt{let}\ (x,(y',z)) = (x,(e,z))\\ \texttt{in}\ ((x,y'),z)\end{array} = \begin{array}{l}\texttt{let}\ ((x,y),z) = (x,(y,z))\\ \texttt{in}\ ((x,e),z)\end{array}$$

$$: (x : A \otimes y' : B') \otimes z : C.$$

Définition (Catégorie précartésienne)

Une catégorie précartésienne est une catégorie pseudocartésienne vérifiant (i) et (ii).

Monades

- En fait, j'ai menti : il y a une approche effective maintenant classique pour traiter les effets. C'est les monades de Moggi.
- Computational λ-calculus (λ_C) : opérateur pour geler des expressions, notion de thunk.
- Sémantique monadique de Moggi vers une catégorie FP avec une monade forte.

Différence conceptuelle avec les catégories précartésiennes

Quand un morphisme fait des effets dans λ_C, ça se voit dans son type :

pas d'effets	effets
$A \to B$	$A \to TB$

où T est la monade considérée.

Monades

- Factorisation de la sémantique de Moggi à travers une notion plus abstraite de catégorie de Kleisli abstraite.
- Mais en fait, factorisation dans l'autre sens : les deux sémantiques sont équivalentes.
- La sémantique abstraite, qui utilise de manière essentielle les catégories précartésiennes, est plus directe.
- Pas bien bien compris : on n'arrive pas à se débarrasser complètement des monades, qui sont en dur dans λ_C.

Types

- On s'intéresse au langage interne des catégories précartésiennes.
- Les constructions syntaxiques font sens dans toute catégorie précartésienne.
- Système de types à effets, qui permet de dériver des informations sur les termes (morphismes).
- Moralement, les effets sont des prédicats logiques très primitifs.

Avertissement

La correspondance entre les axiomes catégoriques et le langage interne n'est pas faite formellement dans la thèse, donc dans cette partie, j'interprète un peu.

Types

- Le langage :

Types :	τ	$::=$	$A \mid \tau \otimes \tau' \mid I$
Expressions :	e	$::=$	$f \mid \mathtt{let}\ p = e\ \mathtt{in}\ e' \mid (e, e')$
Patterns :	p	$::=$	$x \mid (p, p')$

- Jugements :

$$\Gamma \vdash e : \tau \qquad \Gamma \vdash e = e' : \tau$$

$$\Gamma \vdash e!E : \tau \qquad \Gamma \vdash e/F : \tau$$

- Effets (en gros) :

$$E ::= \mathit{central} \mid \mathit{copyable} \mid \mathit{discardable} \mid E \wedge E$$
$$F ::= \mathit{relevant}(x) \mid \mathit{clear}(x) \mid \mathit{affine}(x) \mid F \wedge F.$$

Exemples de règles

- Associativité de la composition catégorique :

$$\frac{\ldots}{\begin{array}{l} \ \mathtt{let}\ x = (\ \mathtt{let}\ y = e\ \mathtt{in}\ e')\ \mathtt{in}\ e'' \\ = \ \mathtt{let}\ y = e\ \mathtt{in}\ \ \mathtt{let}\ x = e'\ \mathtt{in}\ e'' \end{array}}$$

- Préservation des effets par composition :

$$\frac{\Gamma \vdash e!E : \tau' \qquad \Gamma, x : \tau' \vdash e'!F : \tau}{\Gamma \vdash \ \mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}\ e'!max(E, F) : \tau}$$

Définition de *max* un peu bâtarde.

Valider l'équation litigieuse

- Par rapport à l'

Equation litigieuse

$$\mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}\ e' \sim [x \mapsto e](e'),$$

cas particuliers :

$e\,!\,E$	$e'\,/\,F$
focal	arbitraire en x
central	linéaire en x
central et discardable	affine en x
$\ldots$	

- Cas difficile : e est seulement copiable.
  Pour que ça passe : tous les $\mathtt{let}\ y = e''$ entre la racine et les occurrences de x doivent être centraux : définition de

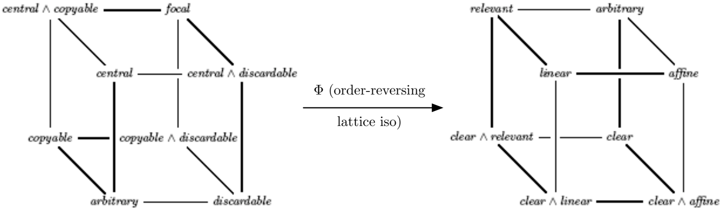
$$e'\,/\,clear(x).$$

Système d'effets

Dualité Φ entre effets E et F

$$\frac{\Gamma \vdash e!E : A \qquad \Gamma, x : A \vdash e'!\Phi(E)(x) : B}{\Gamma \vdash (\,\mathtt{let}\ x = e\ \mathtt{in}\ e') = ([x \mapsto e](e')) : B}$$

est valide :



Résultats

Théorème

Correction et complétude.

Morale : l'équation litigieuse est régie par le nombre d'occurrences de x et les définitions entre elles et la racine.

Etat global

- Construction d'une catégorie avec état global $\mathcal{C}_S$ au-dessus d'une catégorie précartésienne donnée $\mathcal{C}$:
- S le type des états,
- $\mathcal{C}_S(A, B) = \mathcal{C}(A \otimes S, B \otimes S)$.
- Par curryfication on retrouve la monade IO de Haskell :
$$IO(B) = (B \otimes S)^S$$
$$\mathcal{C}_S(A, B) \cong \mathcal{C}(A, IO(B)),$$
cf. $A \to TB$.
- Mieux : pas besoin d'exponentielles.

Etat global

- Centralité : central dans C + ne lit pas, n'écrit pas.
- Discardabilité : $\pi' \circ f = \pi'$
  ($\Rightarrow f$ n'écrit pas, ne diverge pas, ne lance pas d'exception, ...).
- Copiabilité : copiabilité dans C + discardabilité dans $C_S \Rightarrow$ copiabilité dans C_S.

Modularité

- Spécification modulaire de langages : ajout de features par couches.
- Ex : un genre d'effet par couche.

Réaliste ?
Reste que les catégories précartésiennes permettent de bien parler des effets, même si c'est pas méga modulaire.