

Théorie des catégories en logique et en informatique

Tom Hirschowitz

Un langage presque universel pour faire des maths

- Deux approches :
 - Élémentaire : un template pour des théories du 1^{er} ordre, ou
 - Ensembliste : un template pour des constructions ensemblistes, avec dans les deux cas, plein de théorèmes gratos.
- Important pour « savoir lire » dans plein de domaines de recherche :
 - ▶ topologie et géométrie algébriques,
 - ▶ physique théorique,
 - ▶ programmation,
 - ▶ logique et théorie de la démonstrationentre autres.

Pourquoi ça marche ?

Abstrait : on parle de ce qu'on peut faire avec les ensembles, pas de leurs éléments.

Re-abstrait : raisonnements graphiques sur des diagrammes.

Unificateur : repose sur un faible nombre de notions fondamentales.
Ex : l'adjonction.

Re-unificateur : crée des liens entre différents domaines de recherche.
Ex : réutilisation de techniques topologiques en logique.

Buts du cours

Syndical Vous permettre de lire des articles utilisant les catégories.

Palace Vous donner envie d'utiliser les catégories dans vos propres travaux par la suite :

- pour expliquer catégoriquement de nouveaux domaines scientifiques,
- pour partager vos idées en les formulant dans un langage presque universel (voir page 1),
- voire pour développer la théorie des catégories elle-même.

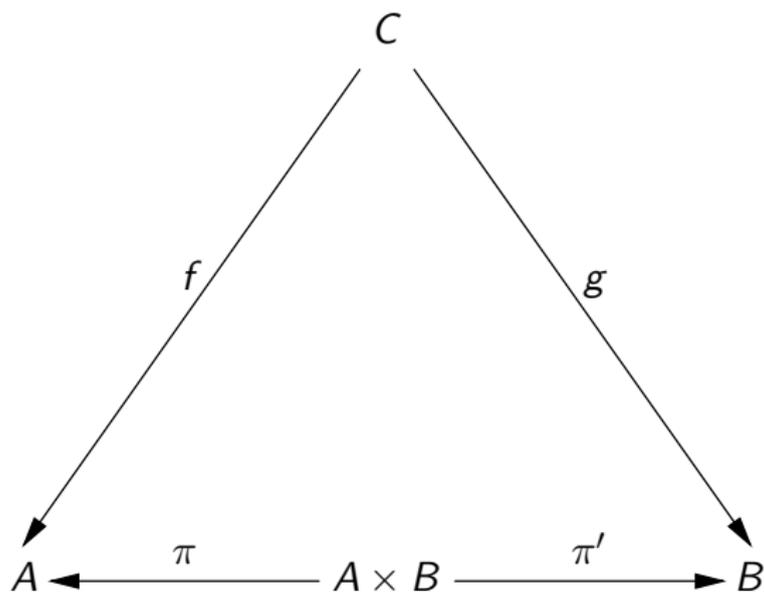
Contenu du cours

- Un peu de catégories pures, forcément.
- Les langages de programmation en termes catégoriques.
Ex : les effets.
- La logique et la théorie de la démonstration en termes catégoriques.
Ex : la théorie des ensembles.
- Quelques autres trucs, vaguement.
Ex : une axiomatisation catégorique de la mécanique quantique.

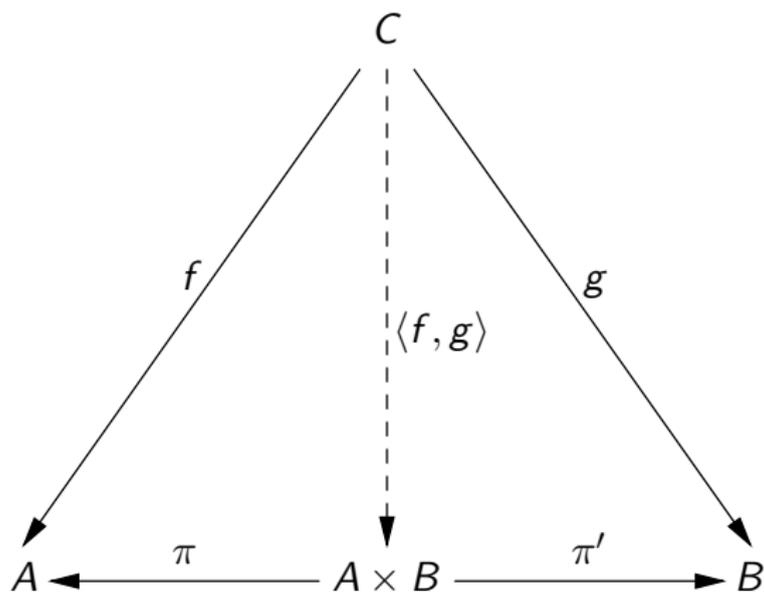
Un exemple de caractérisation d'ensembles par
« ce qu'on peut faire avec » : le produit cartésien

$$A \longleftarrow^{\pi} A \times B \longrightarrow^{\pi'} B$$

Un exemple de caractérisation d'ensembles par « ce qu'on peut faire avec » : le produit cartésien



Un exemple de caractérisation d'ensembles par « ce qu'on peut faire avec » : le produit cartésien



Rassurages

- Les articles que vous aurez à lire pourront parler de programmation ou de logique sans utiliser les catégories.
- Le but est de donner des bases, pas de perdre tout le monde.