Foncteurs polynomiaux et carrés exacts en sémantique des jeux

Clovis Eberhart Tom Hirschowitz

Univ. Grenoble Alpes, Univ. Savoie Mont Blanc, CNRS, LAMA
Chambéry, France

12 octobre 2018

Mise en bouche : quelle est la preuve la plus courte que $\mathbb{1}$ est un topos ?

Théorie des langages de programmation

- Langages de programmation comme objet d'étude.
- Questions pertinentes :
  - equivalence de programmes,
  - correction de compilateur (traductions entre langages),
  - expressivité, ...

Une question importante

Abstraction pleine pour le langage PCF.

Abstraction pleine pour le langage PCF

- Type de base : $\mathbb{N}$.
- Langage fonctionnel (Turing puissant) typé :

$$\mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \qquad (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \qquad \ldots$$

- Catégorie syntaxique PCF (cf. *functorial semantics*).
- Modèle : foncteur d'interprétation

$$[\![-]\!] \colon PCF \to \mathscr{C}$$

respectant les règles de calcul : $[\![x \mapsto M(x)]\!]([\![N]\!]) = [\![M(N)]\!]$, ...

Abstraction pleine pour le langage PCF

- Equivalence observationnelle :

$$M \approx N \qquad \text{ssi} \qquad \forall C, v, (C[M] \Downarrow v) \Leftrightarrow (C[N] \Downarrow v).$$

  Pour tout contexte C,
  - $C[M]$ et $C[N]$ convergent en même temps,
  - et vers la même valeur v.

- Modèle pleinement abstrait : s'étend en un foncteur fidèle

$$\begin{tikzcd} PCF \arrow[r, two heads] \arrow[d, "{[\![-]\!]}"'] & PCF/\approx \arrow[dl, dashed] \\ \mathscr{C}. & \end{tikzcd}$$

  Concrètement :
  - $[\![M]\!] = [\![N]\!] \Longrightarrow M \approx N$.
  - Définissabilité : $\forall f : [\![A]\!] \to [\![B]\!], \exists M, f = [\![M]\!]$.

Résumé et discussion

Essentiellement deux buts : caractériser

- l'équivalence observationnelle et
- les fonctions définissables.

Question floue : la syntaxe quotientée donne une réponse.
Réponse partielle : sémantique des jeux.

- Types $\rightsquigarrow$ jeux.
- Programmes $\rightsquigarrow$ stratégies.
- Convaincant pour la définissabilité : innocence.
- Utilise un quotient pour l'équivalence observationnelle.

De PCF à Algol idéalisé

Depuis le modèle originel de PCF :

- références,
- appel par valeur,
- opérateurs de contrôle (continuations),
- concurrence,...

Motivation

- Nombreuses variantes.
- Trame commune.
- Définitions et preuves délicates.

Contribution

Cadre abstrait pour construire

- des catégories de stratégies
- des sous-catégories de stratégies innocentes,

dans des variantes de modèles existants (AJM, HO, TO).

Jeux HON

Un jeu donne la structure des *coups* permis.

booléens ($\mathbb{B}$)	entiers naturels ($\mathbb{N}$)
q	q
$\mathbf{t}$ $\mathbf{f}$	0 1 2 ...

Jeux HON : parties

En bref :

- suite de coups
- interaction entre programme et environnement.

Exemple : `f = fun n -> 2 * n`

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & q_r \\ q_l & & \\ 6_l & & \\ & & 12_r \end{array}$$

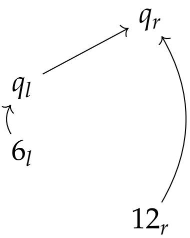
Jeux HON : parties

En bref :

- suite de coups
- interaction entre programme et environnement.

Exemple : `f = fun n -> 2 * n`

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$



Jeux HON : stratégies

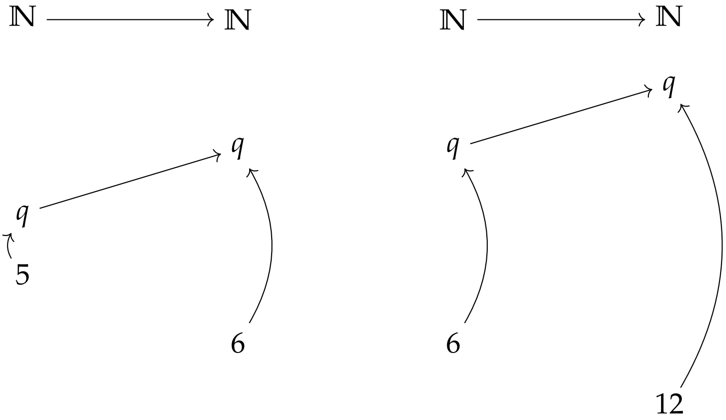
Stratégie = ensemble de parties clos par préfixe, dites acceptées.
Exemple : pour `f = fun n -> 2 * n`, (en gros) les parties de la forme

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r] & \mathbb{N} \\
 & q_r \\
q_l \arrow[ur] & \\
n_l \arrow[u, bend left] & \\
 & (2n)_r \arrow[uuu, bend right]
\end{tikzcd}
$$

Jeux HON : composition

Composition parallèle + *occultation*.

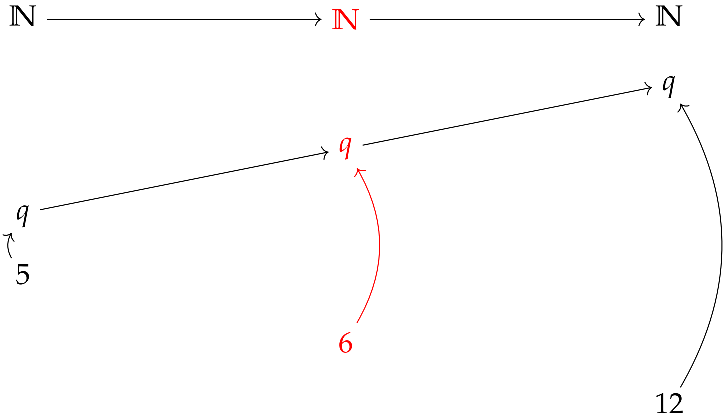
```
f = fun n -> n + 1                f = fun n -> 2 * n
```



Jeux HON : composition

Composition parallèle + *occultation*.

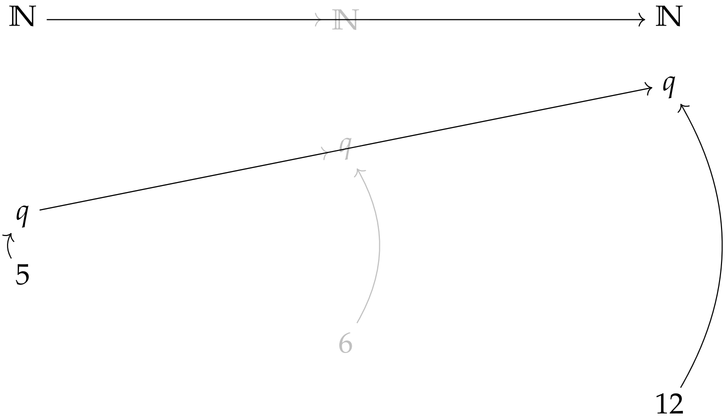
```
f = fun n -> n + 1          f = fun n -> 2 * n
```



Jeux HON : composition

Composition parallèle + *occultation*.

`f = fun n -> n + 1`   `f = fun n -> 2 * n`



Innocence

Idée : caractériser les programmes purement fonctionnels (pas de référence).
Stratégie innocente : comportement ne dépend que de la vue.
Vue : un certain type de partie.

- Stratégie pour un compteur :

$$q \quad 0 \qquad\qquad q \quad 1$$

- Stratégie pour la fonction successeur :

$$q_r \quad q_l \quad 5_l \quad 6_r \qquad\qquad q_r \quad q_l \quad 5_l \quad 6_r$$

Innocence : la stratégie accepte une partie ssi elle accepte toutes ses vues.

Innocence

Idée : caractériser les programmes purement fonctionnels (pas de référence).
Stratégie innocente : comportement ne dépend que de la vue.
Vue : un certain type de partie.

- Stratégie pour un compteur :

$$\begin{tikzcd} q & 0 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q & 1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

- Stratégie pour la fonction successeur :

$$\begin{tikzcd} q_r & q_l \arrow[l, bend right] & 5_l \arrow[l, bend right] & 6_r \arrow[lll, bend right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} q_r & q_l \arrow[l, bend right] & 5_l \arrow[l, bend right] & 6_r \arrow[lll, bend right] \end{tikzcd}$$

Innocence : la stratégie accepte une partie ssi elle accepte toutes ses vues.

Innocence

Idée : caractériser les programmes purement fonctionnels (pas de référence).
Stratégie innocente : comportement ne dépend que de la vue.
Vue : un certain type de partie.

- Stratégie pour un compteur :

$$\begin{tikzcd} q & 0 \arrow[l, bend right] & q & 1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

- Stratégie pour la fonction successeur :

$$\begin{tikzcd} q_r & q_l \arrow[l, bend right] & 5_l \arrow[l, bend right] & 6_r \arrow[lll, bend right] & q_r & q_l \arrow[l, bend right] & 5_l \arrow[l, bend right] & 6_r \arrow[lll, bend right] \end{tikzcd}$$

Innocence : la stratégie accepte une partie ssi elle accepte toutes ses vues.

Innocence

Stratégie innocente

Accepte une partie ssi elle accepte toutes ses vues.

- Soit v une vue de la partie p.
- Rarement un préfixe $v \leqslant p$.

Idée (Melliès, retravaillée par P. Levy)

Ajouter des morphismes !

- Equivalence de permutation $\sim$.
- Morphismes : $v \leqslant p' \sim p$ (en retenant *comment* $p' \sim p$!).

Le cone des vues

Première reformulation de l'innocence

Partie p acceptée ssi v l'est pour tout morphisme $v \to p$.

Nouvelle définition de stratégie

Equivariance

Nouvelle contrainte naturelle : si $p \sim q$ alors $(p \in \sigma) \Leftrightarrow q \in \sigma$.

Definition

Stratégie = ensemble de parties équivariant et clos par préfixe.

Nouvelle définition de stratégie

Proposition

(Ensembles de parties équivariant et clos par préfixe) $\simeq$ (Foncteurs $\sigma \colon Plays^{op} \to 2$).

- $2 = (0 \to 1)$.
- $\sigma(p) = 1$: partie acceptée.
- Clôture par préfixe : si q acceptée, alors

$$\sigma(p \leqslant q) = (\sigma(q) \leqslant \sigma(p)) = (1 \leqslant \sigma(p))$$

  donc p acceptée.
- Equivariance : si p acceptée, alors

$$\sigma(p \sim q) = (\sigma(q) = \sigma(p)).$$

Non-déterminisme

- Des foncteurs $\mathbb{C}^{op} \to \mathbb{2}$, préfaisceaux booléens,
- aux foncteurs $\mathbb{C}^{op} \to \mathrm{Set}$, i.e., préfaisceaux $\widehat{\mathbb{C}}$.

Exemple

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, "a"] & \\ & \cdot \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "c"] & \\ \cdot & & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "a"] & \\ \cdot \arrow[d, "b"'] & & \cdot \arrow[d, "c"] \\ \cdot & & \cdot \end{tikzcd}$$

$$\sigma(a) = \{x\} \qquad \sigma'(a) = \{x, x'\}$$

Foncteur correspondant vers $\mathbb{2}$, vu comme un ensemble de parties acceptées :

$$|\sigma| = |\sigma'| = \{\varepsilon, a, ab, ac\}.$$

L'innocence comme une condition de faisceau

Definition

$\sigma \in \widehat{\mathbb{P}_{A,B}}$ innocente ssi faisceau pour la topologie induite par $\mathbb{V}_{A,B} \xhookrightarrow{\mathbf{i}_{A,B}} \mathbb{P}_{A,B}$.

Concrètement :

$$
\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[dr] & \dots & v_n \arrow[dl] \\
& p &
\end{tikzcd}
\quad \mapsto \quad
\begin{tikzcd}
\sigma(v_1) & \dots & \sigma(v_n) \\
& \sigma(p). \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

- En booléen : $\sigma(p) = \sigma(v_1) \wedge \dots \wedge \sigma(v_n)$, 'toutes les vues sont acceptées'.
- En général : famille compatible de preuves d'acceptation.

Proposition

σ innocente ssi dans l'image essentielle de $\prod_{\mathbf{i}_{A,B}}$.

But

- Associativité de la composition (+ identité).
- Stabilité de l'innocence par composition (+ identité).

Abstraction : trame récurrente

- Définition des jeux A, B, C, ...
- Définition des catégories de parties $\mathbb{P}_{A,B}$.
- Définition des stratégies $A \to B$ comme préfaisceaux sur $\mathbb{P}_{A,B}$.
- Composition $=$ composition parallèle $+$ occultation.
- Identités $=$ stratégies imitatrices.
- Preuve qu'on obtient une catégorie de jeux et stratégies.
- Définition d'une notion d'innocence.
- Preuve que les stratégies innocentes forment une sous-catégorie.

Abstraction : trame récurrente

- Définition des jeux A, B, C, ... **Hypothèse !**
- Définition des catégories de parties $\mathbb{P}_{A,B}$. **Hypothèse !**
- Définition des stratégies $A \to B$ comme préfaisceaux sur $\mathbb{P}_{A,B}$.
- Composition $=$ composition parallèle $+$ occultation.
- Identités $=$ stratégies imitatrices.
- Preuve qu'on obtient une catégorie de jeux et stratégies.
- Définition d'une notion d'innocence. **Hypothèse !**
- Preuve que les stratégies innocentes forment une sous-catégorie.

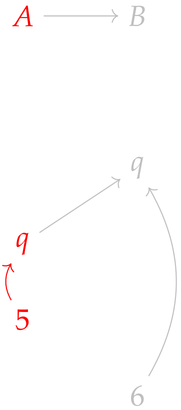
Catégories de parties

$$A \longrightarrow B$$

- Jeux A, B, C...
- Catégories de parties $\mathbb{P}_A$, $\mathbb{P}_{A,B}$, $\mathbb{P}_{A,B,C}$...

$$\begin{tikzcd}
 & q \\
q \arrow[ur] & \\
5 \arrow[u, bend left] & \\
 & 6 \arrow[uuu, bend right]
\end{tikzcd}$$

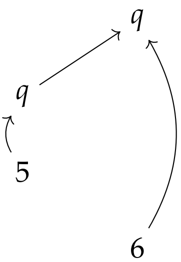
Catégories de parties



- Jeux A, B, C...
- Catégories de parties $\mathbb{P}_A$, $\mathbb{P}_{A,B}$, $\mathbb{P}_{A,B,C}$...
- Projections $\mathbb{P}_{A,B} \to \mathbb{P}_A$.

Catégories de parties

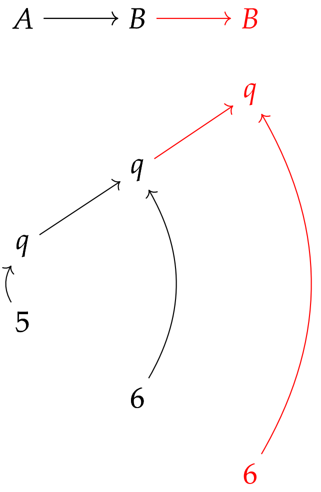
$$A \longrightarrow B$$



- Jeux A, B, C...
- Catégories de parties $\mathbb{P}_A$, $\mathbb{P}_{A,B}$, $\mathbb{P}_{A,B,C}$...
- Projections $\mathbb{P}_{A,B} \to \mathbb{P}_A$.

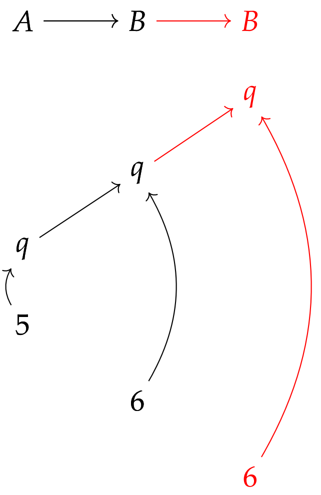
Catégories de parties

- Jeux A, B, C...
- Catégories de parties $\mathbb{P}_A$, $\mathbb{P}_{A,B}$, $\mathbb{P}_{A,B,C}$...
- Projections $\mathbb{P}_{A,B} \to \mathbb{P}_A$.
- Insertions $\mathbb{P}_{A,B} \to \mathbb{P}_{A,B,B}$.



Catégories de parties

- Jeux A, B, C...
- Catégories de parties $\mathbb{P}_A$, $\mathbb{P}_{A,B}$, $\mathbb{P}_{A,B,C}$...
- Projections $\mathbb{P}_{A,B} \to \mathbb{P}_A$.
- Insertions $\mathbb{P}_{A,B} \to \mathbb{P}_{A,B,B}$.
- Compatibilité entre projections et insertions.



Description simpliciale des catégories de parties

Definition

Cadre de jeux :

- ensemble $\mathbb{A}$ de jeux,
- foncteur $\mathbb{P} \colon (\Delta/\mathbb{A})^{op} \to \mathrm{Cat}$.

où $\Delta/\mathbb{A}$ a pour

- objets : listes $L = A_1, \ldots, A_n$ de jeux,
- morphismes :
  - coprojections $A, C \to A, B, C$,
  - coinsertions $A, A, B \to A, B$.

Stratégies $A \to B$: $\widehat{\mathbb{P}_{A,B}}$.

Foncteurs polynomiaux

Si $F \colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, on note Δ_F la restriction le long de F^{op}.
Chaîne d'adjonctions bien connue :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{C}} \arrow[rr, bend left, "\Sigma_F"] \arrow[rr, bend right, "\Pi_F"'] & & \widehat{\mathbb{D}}. \arrow[ll, "\Delta_F" description] \end{tikzcd}$$

Foncteur polynomial : composé de Δs, $\prod$s et $\sum$s.

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\Pi_\nabla} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} \dashrightarrow^{\Sigma_{\delta_1}} \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}$$

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\Pi_\nabla} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} \dashrightarrow^{\Sigma_{\delta_1}} \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}$$

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\Pi_\nabla} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} \dashrightarrow^{\Sigma_{\delta_1}} \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}$$

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\Pi_\nabla} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} \dashrightarrow{\Sigma_{\delta_1}} \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}$$

Justification :

$\mathbf{m}_{A,B,C}(\sigma, \tau)$ accepte p

ssi

ssi

ssi

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\Pi_\nabla} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} \dashrightarrow^{\Sigma_{\delta_1}} \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}$$

Justification :

	$\mathbf{m}_{A,B,C}(\sigma, \tau)$ accepte p
ssi	il existe une séquence d'interaction $u \in \mathbb{P}_{A,B,C}$ acceptée et de projection p
ssi	
ssi	

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\color{red}{\Pi}_\nabla} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} \dashrightarrow{\Sigma_{\delta_1}} \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}$$

Justification :

	$\mathbf{m}_{A,B,C}(\sigma,\tau)$ accepte p
ssi	il existe une séquence d'interaction $u \in \mathbb{P}_{A,B,C}$ acceptée et de projection p
ssi	$\mathrm{inl}\, u$ et $\mathrm{inr}\, u$ sont acceptées
ssi	

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\Pi_\nabla} \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} \dashrightarrow^{\Sigma_{\delta_1}} \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}$$

Justification :

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{m}_{A,B,C}(\sigma,\tau) \text{ accepte } p \\ \text{ssi} & \text{il existe une séquence d'interaction } u \in \mathbb{P}_{A,B,C} \\ & \text{acceptée et de projection } p \\ \text{ssi} & \mathrm{inl}\, u \text{ et } \mathrm{inr}\, u \text{ sont acceptées} \\ \text{ssi} & \sigma \text{ accepte } \delta_2(u) \text{ et } \tau \text{ accepte } \delta_0(u). \end{array}$$

Composition

Idée : composition parallèle + occultation.

$$\mathbb{P}_{\widehat{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \xrightarrow{\Delta_{\delta_2+\delta_0}} \mathbb{P}_{\widehat{A,B,C} + \mathbb{P}_{A,B,C}} \xrightarrow{\Pi_\nabla} \mathbb{P}_{\widehat{A,B,C}} \dashrightarrow{\Sigma_{\delta_1}} \mathbb{P}_{\widehat{A,C}}$$

Justification :

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{m}_{A,B,C}(\sigma,\tau) \text{ accepte } p \\ \text{ssi} & \text{il existe une séquence d'interaction } u \in \mathbb{P}_{A,B,C} \\ & \text{acceptée et de projection } p \\ \text{ssi} & \mathrm{inl}\, u \text{ et } \mathrm{inr}\, u \text{ sont acceptées} \\ \text{ssi} & \sigma \text{ accepte } \delta_2(u) \text{ et } \tau \text{ accepte } \delta_0(u). \end{array}$$

En fait : version générale (*proof-relevant*).

Stratégies imitatrices

$$\mathbb{1} \cong \widehat{\varnothing} \xrightarrow{\Pi_!} \widehat{\mathbb{P}_A} \xrightarrow{\Sigma_{\iota_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,A}}$$

Justification :

$\propto_A$ accepte p

ssi

ssi

Stratégies imitatrices

$$\mathbb{1} \cong \widehat{\varnothing} \xrightarrow{\Pi_!} \widehat{\mathbb{P}_A} \xrightarrow{\color{red}{\Sigma_{\iota_0}}} \widehat{\mathbb{P}_{A,A}}$$

Justification :

$\quad \text{æ}_A$ accepte p

ssi il existe une suite de coups acceptée $s \in \mathbb{P}_A$
et envoyée sur p

ssi

Stratégies imitatrices

$$\mathbb{1} \cong \widehat{\varnothing} \xrightarrow{\Pi_!} \widehat{\mathbb{P}_A} \xrightarrow{\Sigma_{\iota_0}} \widehat{\mathbb{P}_{A,A}}$$

Justification :

	æ_A accepte p
ssi	il existe une suite de coups acceptée $s \in \mathbb{P}_A$
	et envoyée sur p
ssi	il existe un antécédent s de p.

Cadre de jeux

Condition supplémentaire pour que $\sum_{\delta_1}$ et $\sum_{\iota_0}$ se comportent bien

Les projections $\delta_1 \colon \mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ et insertions $\iota_0 \colon \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_{A,A}$ sont des fibrations discrètes.

Associativité de la composition

Théorème. Le carré

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C} + \mathbb{P}_{C,D}} \arrow[r, "\mathbf{m}_{A,B,C}+\mathbb{P}_{C,D}"] \arrow[d, "\mathbb{P}_{A,B}+\mathbf{m}_{B,C,D}"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,C} + \mathbb{P}_{C,D}} \arrow[d, "\mathbf{m}_{A,C,D}"] \\
\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,D}} \arrow[r, "\mathbf{m}_{A,B,D}"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,D}}
\end{tikzcd}
$$

commute (à iso près) si

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{A,B,C,D} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,B,D} \arrow[d] \\
\mathbb{P}_{B,C,D} \arrow[r] & \mathbb{P}_{B,D}
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{A,B,C,D} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,C,D} \arrow[d] \\
\mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[r] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
$$

sont des pullbacks (lemme de *zipping*).
Neutralité des stratégies imitatrices : même topo.

Applications

Applications :

- HON,
- variantes,
- AJM,
- TO.

Forment des cadres de jeux et la composition abstraite coïncide avec la composition standard.

Cadres de jeux innocents

On ajoute au cadre une sous-catégorie pleine de vues $\mathbb{V}_{A,B} \xrightarrow{\mathbf{i}_{A,B}} \mathbb{P}_{A,B}$.

Definition

Stratégie innocente : faisceau pour la topologie induite par $\mathbf{i}_{A,B}$.

Equivalent : dans l'image essentielle de $\widehat{\mathbb{V}_{A,B}} \xrightarrow{\Pi_{\mathbf{i}_{A,B}}} \widehat{\mathbb{P}_{A,B}}$.

Stabilité de l'innocence par composition

La composée de deux stratégies innocentes est innocente.

(I.e., dans l'image essentielle $\prod_{\mathbf{i}_{A,C}}$.)

$$\begin{tikzcd}
 & & \widehat{\mathbb{V}_{A,C}} \arrow[d, "\prod_{\mathbf{i}_{A,C}}"] \\
\widehat{\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C}} \arrow[r, "\prod_{\mathbf{i}_{A,B}+\mathbf{i}_{B,C}}"'] \arrow[urr, dashed] & \widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \arrow[r, "\mathbf{m}_{A,B,C}"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,C}}
\end{tikzcd}$$

Preuve de stabilité de l'innocence

But : la composée de deux stratégies innocentes est innocente.
En utilisant une définition équivalente de la composition :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[d, equal] & & \mathbb{V}_{(A,B),(B,C)} \arrow[d, "\Pi"'] & \mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{V}_{A,C} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C)} & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}$$

Preuve de stabilité de l'innocence

But : la composée de deux stratégies innocentes est innocente.
En utilisant une définition équivalente de la composition :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[d, equal] & & \mathbb{V}_{(A,B),(B,C)} \arrow[d, "\Pi"'] & \mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{V}_{A,C} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C)} & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
$$

- Commutation simple.

Preuve de stabilité de l'innocence

But : la composée de deux stratégies innocentes est innocente.
En utilisant une définition équivalente de la composition :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[d, equal] & & \mathbb{V}_{(A,B),(B,C)} \arrow[d, "\Pi"'] & \mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{V}_{A,C} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C)} & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
$$

- Commutation simple.
- Carré exact (Guitart), modulo hypothèse (analyticité pour les vues).

Preuve de stabilité de l'innocence

But : la composée de deux stratégies innocentes est innocente.
En utilisant une définition équivalente de la composition :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[d, equal] & & \mathbb{V}_{(A,B),(B,C)} \arrow[d, "\Pi"'] & \color{red}{\mathbb{V}_{A,B,C}} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, red, "\Sigma"] \arrow[d, red, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, red, "\lrcorner", very near start] & \color{red}{\mathbb{V}_{A,C}} \arrow[d, red, "\Pi"] \\
\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C)} & \color{red}{\mathbb{P}_{A,B,C}} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, red, "\Sigma"'] & \color{red}{\mathbb{P}_{A,C}}
\end{tikzcd}
$$

- Commutation simple.
- Carré exact (Guitart), modulo hypothèse (analyticité pour les vues).
- Carré distributif, modulo hypothèse (localité).

Cf. loi de distribution dans Harmer-Hyland-Melliès (LICS '07).

Carrés de poussée en avant locale

Carré de poussée en avant locale = carré de pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "V"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C \arrow[d, "T"] \\ B \arrow[r, "U"'] & D \end{tikzcd}$$

avec

1. U plein et fidèle,
2. T une fibration discrète
3. et $T \cong \prod_U(S)$.

Ou bien (3') : T correspond à un faisceau pour la topologie induite par U.

Lemma

Les carrés de poussée en avant locale sont distributifs.

Un carré de poussée en avant locale

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}$$

Un carré de poussée en avant locale

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & u_1 \arrow[d, dashed] & \\
u_n \arrow[dd, dashed] & v_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
 & & \\
v_n \arrow[rr, "f_n"'] & & p
\end{tikzcd}
$$

Un carré de poussée en avant locale

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & u_1 \arrow[dr, red] \arrow[dd, dashed] & \\
u_n \arrow[rr, red] \arrow[dd, dashed] & & {\color{red} u} \arrow[dd, dashed, red] \\
 & v_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
v_n \arrow[rr, "f_n"'] & & p
\end{tikzcd}
$$

- Hypothèse de localité : δ_1 est un faisceau.
- Déjà observé par Tsukada et Ong.

Résumé

Contributions :

- Cadres de jeux : jeux, parties, stratégies, séquences d'interaction, projections...
- Construction abstraite de catégories de jeux et stratégies.
- Sous-catégorie de stratégies innocentes.
- Applications.

Non abordé ici :

- Transfert entre préfaiseaux généraux et booléens.

Perspectives

- Structure de la catégorie de strategies (monoïdale, fermée, etc).
- Généralisation (ex : stratégies AJM saturées).
- Modèles plus exotiques (ex : à base de structures d'évènements).
- Catégorification : bicatégorie de games et stratégies.
- Des modèles de jeux à la sémantique des jeux.
- Meilleure compréhension des carrés distributifs.

Merci pour votre attention.

Et maintenant, quelle est la preuve la plus courte que $\mathbb{1}$ est un topos ?

Result Transfer

Adjunction :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, bend left, "\mathbf{l}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mathbf{r}"] \end{tikzcd}$$

Result transfer :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{P}_{A,B}} \arrow[r, bend left, "\mathbf{l}_!"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widetilde{\mathbb{P}_{A,B}} \arrow[l, bend left, "\mathbf{r}_!"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \arrow[r, "\mathbf{m}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\mathbf{l}_!"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,C}} \arrow[d, "\mathbf{l}_!"] \\ \widetilde{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C}} \arrow[r, "\overline{\mathbf{m}_{A,B,C}}"'] & \widetilde{\mathbb{P}_{A,C}} \end{tikzcd}$$

Exact Squares

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi}{\Longrightarrow}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "V"] \\
\mathbb{B} \arrow[r, "U"'] & \mathbb{D}
\end{tikzcd}$$

Mates :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{A}} \arrow[d, "\Sigma_S"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_\varphi \Downarrow"] & \widehat{\mathbb{C}} \arrow[l, "\Delta_T"'] \arrow[d, "\Sigma_V"] \\
\widehat{\mathbb{B}} & \widehat{\mathbb{D}} \arrow[l, "\Delta_U"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{A}} \arrow[r, "\Pi_T"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\Pi_\varphi}{\Longleftarrow}"] & \widehat{\mathbb{C}} \\
\widehat{\mathbb{B}} \arrow[u, "\Delta_S"] \arrow[r, "\Pi_U"'] & \widehat{\mathbb{D}} \arrow[u, "\Delta_V"']
\end{tikzcd}$$

Exact square : $\sum_\varphi$ (equivalently $\prod_\varphi$) is an isomorphism.
Guitart : conditions for square to be exact.

Distributive Squares

Conditions for

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{A}} \arrow[d, "\Sigma_S"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\tilde{\varphi}}{\Longrightarrow}"] & \widehat{\mathbb{C}} \arrow[l, "\Pi_T"'] \arrow[d, "\Sigma_V"] \\
\widehat{\mathbb{B}} & \widehat{\mathbb{D}} \arrow[l, "\Pi_U"]
\end{tikzcd}
$$

to commute.

Composition

Associativity of composition :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{A,B} \widehat{+ \mathbb{P}_{B,C}} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[r, "\mathbf{m}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{C,D}"] \arrow[d, "\mathbb{P}_{A,B} + \mathbf{m}_{B,C,D}"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,C} + \mathbb{P}_{C,D}} \arrow[d, "\mathbf{m}_{A,C,D}"] \\
\widehat{\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,D}} \arrow[r, "\mathbf{m}_{A,B,D}"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,D}}
\end{tikzcd}
$$

Associativity of Composition

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{A,B} + \widehat{\mathbb{P}_{B,C}} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Pi"'] & \widehat{\mathbb{P}_{(A,B),(B,C)}} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[r, "\Delta"] & \widehat{\mathbb{P}_{A,B,C}} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[r, "\Sigma"] & \widehat{\mathbb{P}_{A,C}} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathbb{P}_{A,B} + \widehat{\mathbb{P}_{(B,C),(C,D)}} \arrow[d, "\Delta"'] & & & \widehat{\mathbb{P}_{(A,C),(C,D)}} \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathbb{P}_{A,B} + \widehat{\mathbb{P}_{B,C,D}} \arrow[d, "\Sigma"'] & & & \widehat{\mathbb{P}_{A,C,D}} \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathbb{P}_{A,B} + \widehat{\mathbb{P}_{B,D}} \arrow[r, "\Pi"'] & \widehat{\mathbb{P}_{(A,B),(B,D)}} \arrow[r, "\Delta"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,B,D}} \arrow[r, "\Sigma"'] & \widehat{\mathbb{P}_{A,D}}
\end{tikzcd}
$$

Proof : Associativity of Composition

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C)} + \mathbb{P}_{C,D} & \mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{P}_{A,C} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{(B,C),(C,D)} & & & \mathbb{P}_{(A,C),(C,D)} \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C,D} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Sigma"'] & & & \mathbb{P}_{A,C,D} \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,D} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,D)} & \mathbb{P}_{A,B,D} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathbb{P}_{A,D}
\end{tikzcd}
$$

Proof : Associativity of Composition

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C)} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[d, "\Pi"] & \mathbb{P}_{A,B,C} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] & \mathbb{P}_{A,C} + \mathbb{P}_{C,D} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{(B,C),(C,D)} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C),(C,D)} & & \mathbb{P}_{(A,C),(C,D)} \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C,D} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Sigma"'] & & \mathbb{P}_{A,B,C,D} \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Sigma"'] & \mathbb{P}_{A,C,D} \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,D} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,D)} & \mathbb{P}_{A,B,D} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathbb{P}_{A,D}
\end{tikzcd}
$$

Proof : Associativity of Composition (cont.)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{(B,C),(C,D)} \arrow[rr, "\Pi"] & & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C),(C,D)} \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,C,D} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\Pi"] \arrow[dr, "\Pi"'] \arrow[dd, "\Sigma"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,C),(C,D)} & \mathbb{P}_{A,B,C,D} \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "\Delta"] \arrow[dd, "\Sigma"] \\
& \mathbb{P}_{(A,B),(B,C,D)} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Sigma"'] & \\
\mathbb{P}_{A,B} + \mathbb{P}_{B,D} \arrow[r, "\Pi"'] & \mathbb{P}_{(A,B),(B,D)} & \mathbb{P}_{A,B,D} \arrow[l, "\Delta"]
\end{tikzcd}
$$

Applications

Applications : HON, variants, AJM, TO.
May all be expressed as game settings, abstract composition agrees with traditional composition.
Subtleties :

- HON : liberal definition of $\mathbb{P}_A$ (for projections $\mathbb{P}_{A,B} \to \mathbb{P}_A$ to exist)
- AJM : slightly dssierent definition of $\mathbb{P}_{A,B,C}$ (projection $\mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ should be a discrete fibration)

Blass games : composition known to be non-associative. Cannot be expressed as a game setting (zipping fails).

Conditions to Preserve Innocence

Locality : $\delta_1 \colon \mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ and $\iota_0 \colon \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_{A,A}$ are sheaves.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\ \mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C} \end{tikzcd}$$

View-analyticity :

Conditions to Preserve Innocence

Locality : $\delta_1 \colon \mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ and $\iota_0 \colon \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_{A,A}$ are sheaves.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
$$

View-analyticity :

Conditions to Preserve Innocence

Locality : $\delta_1 \colon \mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ and $\iota_0 \colon \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_{A,A}$ are sheaves.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& u_1 \arrow[dd, dashed] & \\
u_n \arrow[dd, dashed] & & \\
& v_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
v_n \arrow[rr, "f_n"'] & & p
\end{tikzcd}
$$

View-analyticity :

Conditions to Preserve Innocence

Locality : $\delta_1 \colon \mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ and $\iota_0 \colon \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_{A,A}$ are sheaves.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& u_1 \arrow[dr, red] \arrow[dd, dashed] & \\
u_n \arrow[rr, red] \arrow[dd, dashed] & & \color{red}{u} \arrow[dd, dashed, red] \\
& v_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
v_n \arrow[rr, "f_n"'] & & p
\end{tikzcd}$$

View-analyticity :

Conditions to Preserve Innocence

Locality : $\delta_1 \colon \mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ and $\iota_0 \colon \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_{A,A}$ are sheaves.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & u_1 \arrow[dr, red] \arrow[dd, dashed] & \\
u_n \arrow[rr, red] \arrow[dd, dashed] & & \color{red}{u} \arrow[dd, dashed, red] \\
 & v_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
v_n \arrow[rr, "f_n"'] & & p
\end{tikzcd}
$$

View-analyticity :

$$
\mathbf{i}_{A,B}(v) \xrightarrow{\quad f \quad} \delta_2(u)
$$

Conditions to Preserve Innocence

Locality : $\delta_1 \colon \mathbb{P}_{A,B,C} \to \mathbb{P}_{A,C}$ and $\iota_0 \colon \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_{A,A}$ are sheaves.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{A,B,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,B,C}"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbb{P}_{A,B,C} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{V}_{A,C} \arrow[r, "\mathbf{i}_{A,C}"'] & \mathbb{P}_{A,C}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & u_1 \arrow[dr, red] \arrow[dd, dashed] & \\
u_n \arrow[rr, red] \arrow[dd, dashed] & & \color{red}{u} \arrow[dd, dashed, red] \\
 & v_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
v_n \arrow[rr, "f_n"'] & & p
\end{tikzcd}$$

View-analyticity :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{i}_{A,B}(v) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \delta_2(u) \\
 & \delta_2(\mathbf{i}_{A,B,C}(w)) \arrow[ur, "\delta_2(h)"'] &
\end{tikzcd}$$

Boolean Innocent Strategies

But (non-deterministic) innocent strategies should not compose !
Answer :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C}} \arrow[r] & \widehat{\mathbb{P}_{A,C}} \arrow[d, "\mathbf{l}_!"] \\
\widetilde{\mathbb{V}_{A,B} + \mathbb{V}_{B,C}} \arrow[u, "\mathbf{r}_!"] \arrow[r] & \widetilde{\mathbb{P}_{A,C}}
\end{tikzcd}$$

does not commute.

- *concurrent* innocent strategies compose
- traditional innocent strategies do not